

Orientierte Matroide und die d-Schritt-Vermutung

Claudia Klost

Berlin, September 2003

Diplomarbeit

Fachbereich Mathematik und Informatik

Freie Universität Berlin

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	5
1 Orientierte Matroide	7
1.1 Punktkonfigurationen	7
1.1.1 Affine Abhängigkeiten	10
1.1.2 Affine Funktionen	14
1.2 Axiomensysteme	16
1.3 Dualität	18
1.4 Operationen auf orientierten Matroiden	20
1.4.1 Löschen von Elementen	20
1.4.2 Kontraktion	23
2 Polytope	27
2.1 Einführung in Polytope	27
2.2 Wege in Polytopen	30
2.3 Simpliziale und einfache Polytope	31
2.3.1 Simpliziale Polytope	32
2.3.2 Einfache Polytope	33
2.4 Polare Polytope	34

3 Die Hirsch-Vermutung	36
3.1 Äquivalente Vermutungen	36
4 Orientierte Matroide und die d-Schritt-Vermutung	40
4.1 Cokreisvermutung	40
4.2 Orientierte Matroide und Polytope	42
4.3 Äquivalenz von Cokreisvermutung und d -Schritt-Vermutung	44
4.4 Orientierte Matroide und die Simplex-Austausch-Vermutung	47
5 Beweis der Cokreisvermutung für Dimension 3 und 4	50
5.1 Beweisidee für die Cokreisvermutung	50
5.2 Beweis der Cokreisvermutung für Dimension 3	56
5.3 Beweis der Cokreisvermutung für Dimension 4	56
6 Fazit	64
Abbildungsverzeichnis	65

Einleitung

Das Ziel dieser Arbeit ist es, die d -Schritt-Vermutung mit Hilfe von orientierten Matroiden zu untersuchen, dazu wird die *Cokreisvermutung* über orientierte Matroide aufgestellt, die eine Verallgemeinerung der d -Schritt-Vermutung darstellt.

Die d -Schritt-Vermutung ist eine Spezialisierung der Hirsch-Vermutung, die 1957 von Warren Hirsch aufgestellt wurde. Sie beschäftigt sich mit der Frage, wie sich der Durchmesser $\delta(P)$ eines Polytops P in Abhängigkeit der Anzahl seiner Seiten verhält. Hirsch vermutete, dass für ein d -Polytop mit n Seiten der Durchmesser $\delta(P) \leq (n - d)$ ist. Später wurde gezeigt, dass es für Aussagen über die Hirsch-Vermutung ausreichend ist, *Dantzigfiguren* zu betrachten. Da jede Dantzigfigur genau $2d$ Seiten hat, lässt sich die Vermutung von Hirsch für Dantzigfiguren als $\delta(P) = d$ schreiben. Deshalb wird die Hirsch-Vermutung für Dantzigfiguren als *d -Schritt-Vermutung* bezeichnet. Bis heute ist nicht bekannt, ob die Hirsch-Vermutung für beliebige n gilt, jedoch bewiesen V. Klee und D. W. Walkup [KW67] die Hirschvermutung für $n - d \leq 5$. Es sind heute weitere Vermutungen bekannt, die äquivalent zur Hirsch-Vermutung sind: in der von V.Klee und P.Wolfe aufgestellten „non-revisiting path conjecture“ wird vermutet, dass es in jedem Polytop einen Weg zwischen je zwei Knoten u und v gibt, der keine Seite erneut betritt, die er schon einmal verlassen hat. Im Gegensatz zur „non-revisiting path conjecture“, deren Aussage ebenfalls über Polytope formuliert ist, gibt es auch zur Hirsch-Vermutung äquivalente Vermutungen, die nicht aus der Polytopetheorie stammen. Ein Beispiel ist

die Simplex-Austausch-Vermutung, die sich mit *simplizialen Basen* beschäftigt.

Die Theorie der orientierten Matroide wurde 1978 von Jon Folkman, Jim Lawrence, Robert G. Bland und Michel Las Vergnas (siehe [FL78] und [BLV78], zitiert in [Zie95, S.149]) unabhängig voneinander eingeführt. Orientierte Matroide können über verschiedene mathematische Strukturen, wie z.B. Graphen, Hyperebenenarrangements oder Punktkonfigurationen definiert werden.

Zu Beginn wird dem Leser eine Einführung in die Theorie der orientierten Matroide gegeben, wobei für diese Arbeit der Zugang über Punktkonfigurationen gewählt wird. Desweiteren werden die grundlegenden Eigenschaften von Polytopen erläutert und erklärt, wie Polytope mit Hilfe orientierter Matroide beschrieben werden können. In Vorbereitung auf den Beweis der Cokreisvermutung werden einige Lemmata bewiesen, die für beliebige Dimension gelten. Diese werden dann verwendet, um die Cokreisvermutung für Dimension 3 und 4 zu beweisen.

1 Orientierte Matroide

Zur mathematischen Struktur der orientierten Matroide kann auf verschiedene Arten Zugang gefunden werden. Eine Möglichkeit bietet die Betrachtung von gerichteten Graphen, andere Herangehensweisen sind über Punktfigurationen und Hyperlinienarrangements möglich.

Für die Betrachtungen dieser Arbeit wird der Zugang über Konfigurationen von Punkten, die den \mathbb{R}^d affin aufspannen, gewählt. Bevor jedoch der Begriff des orientierten Matroids formal definiert wird, ist es notwendig, sich zunächst mit solchen Punktfigurationen zu beschäftigen.

1.1 Punktfigurationen

Sei $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ eine endliche Menge von n Punkten, die den \mathbb{R}^d affin aufspannen. Dabei werden nur Punkte in allgemeiner Lage betrachtet, d.h. auf einer d -dimensionalen Ebene liegen höchstens $d + 1$ Punkte.

Jede Menge von Punkten des affinen Raumes \mathbb{R}^d kann in den \mathbb{R}^{d+1} eingebettet werden, indem alle Punkte aus P auf eine d -dimensionale Hyperebene im \mathbb{R}^{d+1} gelegt werden.

Die zu einer Punktmenge P gehörige Menge $V \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ von eingebetteten Punkten ist definiert als

$V = \left\{ v_i \mid v_i = \begin{pmatrix} 1 \\ p_i \end{pmatrix}, p_i \in P \right\} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$. Die so in den \mathbb{R}^{d+1} eingebetteten Punkte können

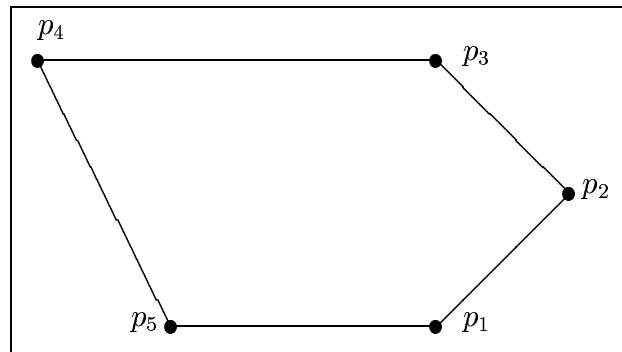


Abbildung 1.1: Konvexe Hülle der Punkte aus P

als Vektoren des \mathbb{R}^{d+1} aufgefasst werden.

Beispiel 1.1. Dieses Beispiel zeigt eine Menge von Punkten des \mathbb{R}^2 , und ihre Einbettung in den \mathbb{R}^3 .

Sei $P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Menge von 5 Punkten im \mathbb{R}^2 .

V ist dann die Menge der 5 zugehörigen Vektoren:

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Die Abbildungen 1.1 und 1.2 zeigen die Menge Punkte aus P , und ihre Einbettung in den \mathbb{R}^3 als Vektoren aus V .

In Hinblick auf die Betrachtungen über *duale orientierte Matroide* in Abschnitt 1.3 wird an dieser Stelle der Begriff der *dualen Konfigurationen* eingeführt.

Definition 1.2. Sei P eine Menge von Punkten, die den \mathbb{R}^d affin aufspannen, und V die Menge von Vektoren, die P in den \mathbb{R}^{d+1} einbettet.

Sei weiterhin $\bar{V} \subseteq (\mathbb{R}^{n-d-1})^*$ eine Menge von Vektoren, derart, dass der Raum der linearen Abhängigkeiten von \bar{V} das orthogonale Komplement des Raumes der linearen Abhängigkeiten von V ist. Dann heißt \bar{V} *Gale Transformierte* von V .

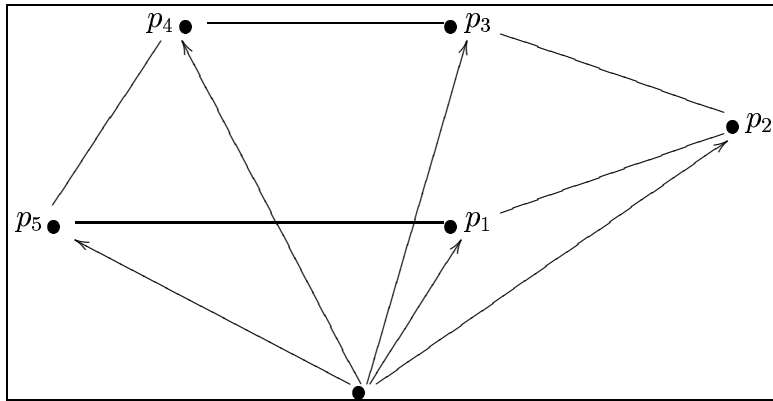


Abbildung 1.2: Einbettung der Punkte aus P in den \mathbb{R}^3

\bar{V} kann wie folgt aus V berechnet werden:

V kann als $((d + 1) \times n)$ -Matrix aufgefasst und in die Form $V = (I_{d+1}|M)$ gebracht werden. Dann ist \bar{V} eine $(n \times (n - d))$ -Matrix mit $\bar{V} = \begin{pmatrix} M \\ -I_{n-d} \end{pmatrix}$.

Es ist möglich, die Dimension der Gale Transformierten um eins zu reduzieren. Dazu werden die Vektoren so skaliert, dass sie alle auf einer $(n - d - 2)$ -dimensionalen Ebene liegen. Dafür kann ein Vektor x gefunden werden, so dass $\bar{v}_i x \neq 0$ f.a. $\bar{v}_i \in \bar{V}$.

Definition 1.3. Die Menge $\bar{P} = \{\bar{p}_i = \frac{\bar{v}_i}{\bar{v}_i x} | \bar{v}_i \in \bar{V}\} \subseteq \{c \in (\mathbb{R}^{n-d-1})^* | cx = 1\}$ heißt *affines Gale Diagramm*. Ein Punkt \bar{p}_i heißt *positiv*, falls $\bar{v}_i x > 0$ und *negativ*, falls $\bar{v}_i x < 0$.

Beispiel 1.4. Sei

$$P = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$\text{Dann ist } V = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ und } \bar{V} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Um das affine Gale Diagramm zu berechnen, kann der Vektor $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ verwendet werden. Dann ist $\bar{P} = \{(0, 1), (1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (0, 1), (1, 0), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$. Die Abbildungen 1.3, 1.4 und 1.5 zeigen die genannten Mengen. Dabei wird für das affine Gale Diagramm in Abbildung 1.5 die Konvention, dass positive Punkte als schwarze Punkte, und negative Punkte als weiße Punkte in ein Diagramm eingezeichnet werden, verwendet.

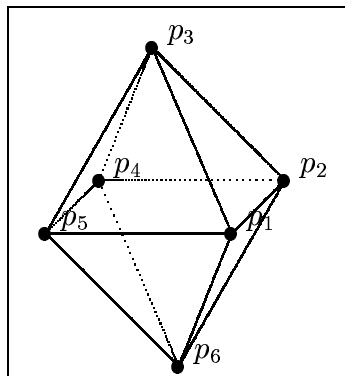
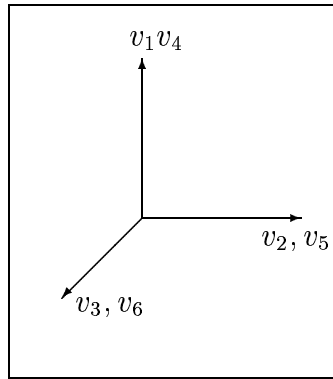
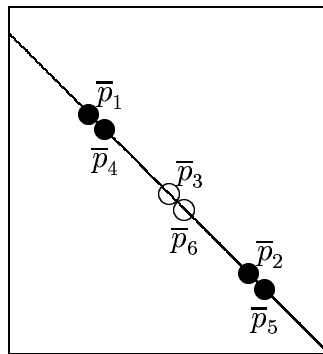


Abbildung 1.3: Punkte aus P

1.1.1 Affine Abhängigkeiten

Definition 1.5 (Lineare Abhängigkeit). Eine Menge von Vektoren $V = \{v_1, \dots, v_k\} \subseteq \mathbb{R}^{d+1}$ ist linear abhängig, falls es Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ gibt, mit $\lambda_i \neq 0$ für ein $i \in \{1, \dots, k\}$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0$.

Abbildung 1.4: Vektoren aus \bar{V} Abbildung 1.5: Punkte aus \bar{P}

Definition 1.6 (Affine Abhängigkeit). Sei $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ eine Menge von Punkten. Eine Menge $\{p_{i_1}, \dots, p_{i_k}\} \subseteq P$, die den \mathbb{R}^d affin aufspannt, heißt *affin abhängig*, falls es Koeffizienten $\lambda_{i_1}, \dots, \lambda_{i_k}$ gibt, mit $\lambda_{i_j} \neq 0$ für ein $j \in \{1, \dots, k\}$, $\sum_{j=1}^k \lambda_{i_j} p_{i_j} = 0$ und $\sum_{j=1}^k \lambda_{i_j} = 0$.

Ein Vektor $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ heißt *affine Abhängigkeit* von P , falls $\lambda \neq 0$, $P\lambda = 0$ und $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 0$.

Lemma 1.7. Ist P eine Menge von Punkten, die den \mathbb{R}^d affin aufspannen und V die Menge der Vektoren, die P in den \mathbb{R}^{d+1} einbettet, dann ist V genau dann linear abhängig, wenn P affin abhängig ist.

Beweis. Sei V linear abhängig, dann gilt $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_i = 0$. Da für alle $v_i \in V$ gilt, dass $v_{1,i} = 1$ und $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_{1,i} = 0$, folgt $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 0$. Damit ist P affin abhängig.

Ist umgekehrt P affin abhängig, dann gilt $\sum_{i=1}^k \lambda_i p_i = 0$. Damit gilt dann $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_{j,i} = 0$ f.a. $2 \leq j \leq k$. Da außerdem aus der affinen Abhängigkeit von P $\sum_{i=k}^k \lambda_i = 0$ folgt, gilt auch $\sum_{i=1}^k \lambda_i v_{1,i} = 0$. Somit ist V linear abhängig. \square

In Beispiel 1.1 ist die Menge $\{p_2, p_3, p_4, p_5\}$ affin abhängig und der Vektor $(0, -6, 7, -4, 3) \in \mathbb{R}^5$ ist eine affine Abhängigkeit der Punktmenge P .

Die späteren Betrachtungen in dieser Arbeit beschäftigen sich mit Polytopen. Da für diese Betrachtungen nicht die genauen Koordinaten der Punkte aus P relevant sind, sondern nur die Form des Polytops, reicht es aus, sich mit der Lage der Punkte zueinander zu beschäftigen. Dies bedeutet, dass nicht die affinen Abhängigkeiten λ betrachtet werden müssen, sondern es ausreicht, sich auf ihre Vorzeichenvektoren $\text{sign}(\lambda) = X \in \{+, -, 0\}^{|P|}$ zu beschränken.

Die affine Abhängigkeit $(0, -6, 7, -4, 3)$ aus Beispiel 1.1 kann daher als $\text{sign}((0, -6, 7, -4, 3)) = (0, -, +, -, +)$ geschrieben werden.

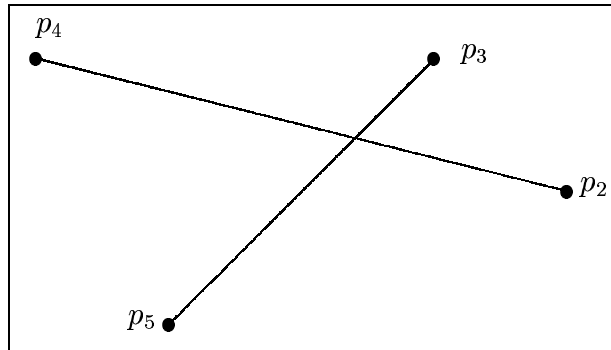
Definition 1.8 (Vektor). Sei P eine Menge von Punkten, die den \mathbb{R}^d affin aufspannen. Der Vorzeichenvektor einer affinen Abhängigkeit heißt *Vektor* von P . Die Menge aller Vektoren wird mit $\mathcal{V}(P) := \{X \in \{+, -, 0\}^{|P|} \mid X = \text{sign}(\lambda), \lambda \text{ ist affine Abhängigkeit von } P\}$ bezeichnet.

Die Menge der Vektoren $\mathcal{V}(P)$ kann auch verkürzt als \mathcal{V} geschrieben werden.

Definition 1.9. Sei X ein Vektor. Dann bezeichnet $X^+ = \{i \mid x_i = +\}$ die Menge aller Elemente mit positivem Vorzeichen, und $X^- = \{i \mid x_i = -\}$ die Menge aller Elemente mit negativem Vorzeichen.

Sind die Mengen X^+ und X^- eines Vektors gegeben, dann ergibt sich die Menge X^0 als $X^0 = \{1, \dots, n\} \setminus (X^+ \cup X^-)$. Ein Vektor kann auch als $X = (X^+, X^-)$ geschrieben werden.

Die Menge aller Elemente eines Vektors X , die nicht Null sind, wird als *Träger* von X

Abbildung 1.6: Schnittpunkt der konvexen Hüllen von X^+ und X^-

bezeichnet: $\text{supp}(X) = (X^+ \cup X^-)$.

Im oberen Beispiel ist $X = (0, -, +, -, +)$, also ist $X^+ = \{3, 5\}$, $X^- = \{2, 4\}$ und $X^0 = \{1\}$

Definition 1.10. Sei P eine affin abhängige Menge von Punkten im \mathbb{R}^d . P heißt *minimal affin abhängig*, falls jede echte Teilmenge von P affin unabhängig ist.

Sei M eine minimal affin abhängige Menge und X der zugehörige Vektor. Da M minimal affin abhängig ist, kann es keine affin abhängige Menge M' geben, mit $M' \subset M$. Daraus folgt, dass es keinen Vektor X' geben kann, mit $\text{supp}(X') \subset \text{supp}(X)$. Die minimal affin abhängigen Mengen korrespondieren demnach zu den Vektoren mit inklusionsminimalem Träger.

Definition 1.11. Ein Vektor $X \in \{+, -, 0\}^{|P|}$, der zu einer minimal affin abhängigen Menge gehört, heißt *Kreis*.

Für einen Kreis X gilt, dass die konvexen Hüllen von X^+ und X^- Simplexe sind und sich genau in einem Punkt schneiden.

Beispiel 1.12. Der Vektor aus Beispiel 1.1 hat schon einen inklusionsminimalen Träger, ist also ein Kreis. Die konvexen Hüllen von $\{p_3, p_5\}$ und $\{p_2, p_4\}$ schneiden sich in genau einem Punkt (siehe Abbildung 1.6).

1.1.2 Affine Funktionen

Eine weitere Möglichkeit, um Informationen über eine Punktconfiguration von Punkten im affinen Raum \mathbb{R}^d zu bekommen, ist die Betrachtung affiner Funktionen.

Definition 1.13. Eine Funktion $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = cx + z$, $c \in (\mathbb{R}^d)^*$, $x \in \mathbb{R}^d$, $z \in \mathbb{R}$ heißt *affine Funktion* auf dem \mathbb{R}^d .

Anschaulich beschreibt jede dieser affinen Funktionen eine gerichtete *Hyperebene* $H \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$, die den \mathbb{R}^d in einen positiven und einen negativen Halbraum zerteilt. Für jeden Punkt in P kann festgestellt werden, ob er im positiven oder im negativen Halbraum oder auf H selber liegt. Daher lassen sich für jede affine Funktion die folgenden Mengen definieren:

Definition 1.14 (Covektor). Sei P eine Menge von Punkten, die den \mathbb{R}^d affin aufspannen, $E = \{1, \dots, |P|\}$ und $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine affine Funktion. Dann ist

$$X^+ := \{i \in E \mid f(p_i) > 0\},$$

$$X^- := \{i \in E \mid f(p_i) < 0\} \text{ und}$$

$$X^0 := \{i \in E \mid f(p_i) = 0\}$$

Das Tupel $X = (X^+, X^-)$ heißt *Covektor* der Punktmenge P . Die Menge aller Covektoren wird als $\mathcal{V}^*(P) = \{X \mid X \text{ ist Covektor von } P\}$ bezeichnet.

Die Menge der Covektoren $\mathcal{V}^*(P)$ kann auch verkürzt als \mathcal{V}^* geschrieben werden.

Definition 1.15 (Cokreis). Sei P eine Menge von Punkten, die den \mathbb{R}^d affin aufspannen, und $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ eine affine Funktion, die eine Hyperebene H definiert. Falls H von Punkten aus P aufgespannt wird, so heißt das Tupel $X = (X^+, X^-)$ *Cokreis* von P . Die Menge aller Cokreise wird als $\mathcal{C}^*(P) = \{X \mid X \text{ ist Cokreis von } P\}$, oder verkürzt als \mathcal{C}^* , bezeichnet.

Beispiel 1.16. Sei P die Menge der Punkte aus Beispiel 1.1. Als Beispiel betrachten wir die beiden Funktionen $f_1, f_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x_1, x_2) = x_1 + 2x_2$ und $f_2(x_1, x_2) = x_1 - x_2$.

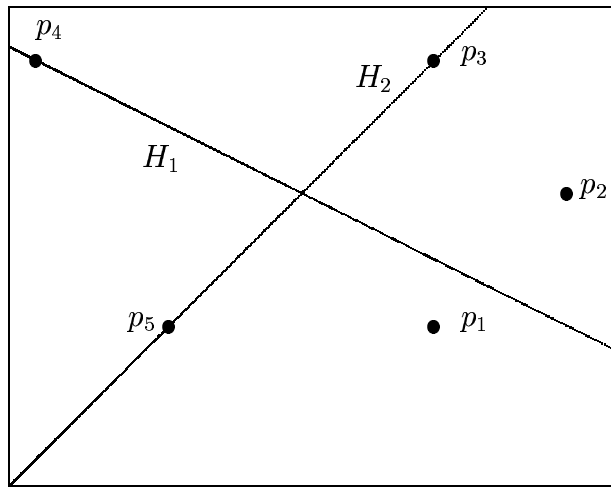


Abbildung 1.7: Die über f_1 und f_2 definierten Hyperebenen H_1 und H_2

Für f_1 und f_2 ergeben sich die folgenden Funktionswerte:

$$\begin{aligned} f_1(p_1) &= -1, & f_2(p_1) &= 2 \\ f_1(p_2) &= 2, & f_2(p_2) &= 2 \\ f_1(p_3) &= 3, & f_2(p_3) &= 0 \\ f_1(p_4) &= 0, & f_2(p_4) &= -3 \\ f_1(p_5) &= -3, & f_2(p_5) &= 0 \end{aligned}$$

Also definiert f_1 den Covektor $X_1 = (\{2, 3\}, \{1, 5\})$ und f_2 den Covektor $X_2 = (\{1, 2\}, \{4\})$. Da die Hyperebene H_2 von Punkten aus P (p_3 und p_5) aufgespannt wird, ist X_2 ein Co-kreis.

Wie die Vektoren, können die Covektoren als Vorzeichenvektoren betrachtet werden. Dann ist $X \in \{+, -, 0\}^{|P|}$ mit

$$X_i = \begin{cases} +, & i \in X^+ \\ -, & i \in X^- \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

Somit kann X_1 als $X_1 = (-, +, +, 0, +)$ und X_2 als $X_2 = (+, +, 0, -, 0)$ geschrieben werden.

1.2 Axiomensysteme

Definition 1.17 (Kreisaxiome). Sei E eine Menge, dann ist $\mathcal{C} \subseteq \{+, -, 0\}^{|E|}$ die Menge von Kreisen eines orientierten Matroids $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$, genau dann wenn sie die folgenden Axiome erfüllt:

$$(C1) \quad \emptyset \notin \mathcal{C}$$

$$(C2) \quad X \in \mathcal{C} \Leftrightarrow -X \in \mathcal{C}$$

$$(C3) \quad \forall X, Y \in \mathcal{C}: \text{supp}(X) \subseteq \text{supp}(Y) \Rightarrow X = Y \text{ oder } X = -Y$$

$$(C4) \quad \forall X, Y \in \mathcal{C}, X \neq -Y \text{ und } e \in X^+ \cap Y^-$$

$\exists Z \in \mathcal{C}$, so dass

$$Z^+ \subseteq (X^+ \cup Y^+) \setminus \{e\} \text{ und}$$

$$Z^- \subseteq (X^- \cup Y^-) \setminus \{e\}$$

Orientierte Matroide können nicht nur über die Menge der Kreise einer Punktmenge P , sondern auch über die Menge ihrer Vektoren definiert werden. Dafür sind zunächst die folgenden Definitionen nötig:

Definition 1.18. Seien $X, Y \in \mathcal{V}$ Vektoren.

$S(X, Y) = \{e | X(e) \neq Y(e) \text{ und } X(e), Y(e) \neq 0\}$ heißt *trennende Menge* von X und Y .

$$(X \circ Y)_e = \begin{cases} X_e, & \text{falls } X_e \neq 0 \\ Y_e, & \text{sonst} \end{cases}$$

Definition 1.19 (Vektoraxiome). Sei E eine Menge, dann ist $\mathcal{V} \subseteq \{+, -, 0\}^{|E|}$ die Menge von Vektoren eines orientierten Matroids, genau dann wenn sie die folgenden Axiome erfüllt:

$$(V1) \quad 0 \in \mathcal{V}$$

$$(V2) \quad X \in \mathcal{V} \Leftrightarrow -X \in \mathcal{V}$$

$$(V3) \quad X, Y \in \mathcal{V} \Rightarrow X \circ Y \in \mathcal{V}$$

- (V4) $\forall X, Y \in \mathcal{V}$ und $e \in S(X, Y)$
 $\exists Z \in \mathcal{V}$, mit
 $Z_e = 0$ und
 $Z_f = (X \circ Y)_f$ für alle $f \notin S(X, Y)$

Wie im vorherigen Abschnitt besprochen, kann die Menge der Vektoren eines orientierten Matroids \mathcal{M} über die affinen Abhängigkeiten der \mathcal{M} zu Grunde liegenden Menge P definiert werden. Es gibt aber auch orientierte Matroide, zu deren Vektorenmenge \mathcal{V} keine Punktmenge existiert, so dass \mathcal{V} die Menge der affinen Abhängigkeiten bildet.

Definition 1.20 (Realisierbarkeit). Ein orientiertes Matroid $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V})$ heißt *realisierbar*, falls es eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^d$ gibt, so dass \mathcal{V} die Menge der affinen Abhängigkeiten von P ist.

Bemerkung 1.21. Wird der Begriff des orientierten Matroids über Kreise definiert, dann ist das orientierte Matroid $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ realisierbar, falls es eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^d$ gibt, so dass \mathcal{C} die Menge der minimalen Abhängigkeiten der Menge P ist.

Definition 1.22 (uniformes orientiertes Matroid). Sei $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ ein orientiertes Matroid. \mathcal{M} heißt *uniform*, falls ein $r \in \mathbb{N}$ existiert, mit $|\text{supp}(C)| = r$ für alle $C \in \mathcal{C}$.

In uniformen orientierten Matroiden, haben also alle Kreise die gleiche Anzahl von Elementen, die nicht Null sind. Damit folgt auch, dass jedes realisierbare orientierte Matroid $\mathcal{M} = (P, \mathcal{C})$, wobei P eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage ist, uniform ist.

Bemerkung 1.23. Genauso wie sich der Abschnitt 1.1 nur mit Punktfigurationen in allgemeiner Lage beschäftigt, beziehen sich die weiteren Betrachtungen dieser Arbeit nur auf uniforme orientierte Matroide.

Definition 1.24 (Rang). Sei $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ ein uniformes orientiertes Matroid, $C \in \mathcal{C}$ und $|\text{supp}(C)| = r + 1$, dann heißt r der Rang von \mathcal{M} .

Bemerkung 1.25. Wenn \mathcal{C} die Menge der minimalen affinen Abhängigkeiten einer Punktmenge $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ist, dann ist der Rang r des uniformen orientierten Matroids $\mathcal{M} = (P, \mathcal{C})$ gerade $r = d + 1$, da P eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage ist, und daher immer genau $d + 2$ Punkte minimal affin abhängig sind.

1.3 Dualität

Ein interessanter Aspekt bei der Betrachtung von orientierten Matroiden ist der Begriff der Dualität. Zu jedem orientierten Matroid \mathcal{M} läßt sich ein eindeutig bestimmtes *duales* orientiertes Matroid \mathcal{M}^* definieren.

Definition 1.26 (Orthogonalität). Sei E eine Menge und $X, Y \in \{+, -, 0\}^{|E|}$ zwei Vorzeichenvektoren. X und Y sind *orthogonal* zueinander ($X \perp Y$), genau dann, wenn eine der beiden Bedingungen erfüllt ist:

1. $X_e = 0$ oder $Y_e = 0$, für alle $e \in \{1, \dots, |P|\}$
2. $\exists i, j \in \{1, \dots, |P|\}$ mit $X_i = Y_i \neq 0$ und $X_j = -Y_j \neq 0$.

Beispiel 1.27. Zur Verdeutlichung des Begriffs der Orthogonalität betrachten wir die beiden folgenden Beispiele:

1. Sei $X = (0, +, -, 0, 0, +)$ und $Y = (0, +, +, 0, 0, +)$, dann sind X und Y orthogonal zueinander, weil $i = 2$ und $j = 3$ existieren, mit $X_2 = Y_2$ und $X_3 = -Y_3$ und $X_2 \neq 0$ und $X_3 \neq 0$. Somit ist die Bedingung 2 erfüllt.
2. Sei $X = (0, +, -, 0, 0, +)$ und $Y = (0, +, 0, +, 0, +)$, dann sind X und Y nicht orthogonal zueinander, weil keine der beiden Bedingungen erfüllt ist.

Definition 1.28. Sei $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ ein orientiertes Matroid. $\mathcal{C}^* = \{Y \in \{+, -, 0\}^{|E|} \mid \exists X \in \mathcal{C}, \text{ mit } X \perp Y\}$ wird als Menge der Cokreise von \mathcal{M} bezeichnet.

Für den Fall, dass das orientierte Matroid \mathcal{M} realisierbar ist, d.h. es eine Menge $P \subseteq \mathbb{R}^d$ existiert, deren affine Abhängigkeiten den Kreisen von \mathcal{M} entsprechen, ist die Menge \mathcal{C}^* die Menge der in Abschnitt 1.1 definierten affinen Funktionen, die von Punkten aus P definiert werden.

Definition 1.29 (Duales orientiertes Matroid). Sei $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ ein orientiertes Matroid. Sei weiterhin \mathcal{C}^* die Menge von Cokreisen von \mathcal{M} . Dann heißt das orientierte Matroid, dessen Kreise genau \mathcal{C}^* sind, *duales orientiertes Matroid* von \mathcal{M} , und wird mit \mathcal{M}^* bezeichnet.

Falls $\mathcal{M} = (P, \mathcal{C})$ realisierbar ist, und $\mathcal{M}^* = (\tilde{P}, \mathcal{C}^*)$ das zugehörige duale orientierte Matroid, dann ist \tilde{P} das in 1.3 definierten affine Gale Diagramm zu P .

Der in 1.29 eingeführte Begriff des dualen orientierten Matroids ist nur dann sinnvoll definiert, wenn die Menge der Cokreise \mathcal{C}^* eines orientierten Matroids die Kreisaxiome erfüllen. Dieses und weitere Erkenntnisse über duale orientierte Matroide, haben Bland und Las Vergnas 1978 gezeigt:

Satz 1.30 (Bland und Las Vergnas). Sei $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ ein orientiertes Matroid. Dann gilt:

1. Es gibt eine eindeutig definierte Menge \mathcal{C}^* von Cokreisen von \mathcal{M} mit $X \perp Y$, für alle $X \in \mathcal{C}$ und $Y \in \mathcal{C}^*$
2. Die Menge \mathcal{C}^* ist die Menge von Kreisen eines orientieren Matroids.
3. Es gilt $\mathcal{M}^{**} = \mathcal{M}$

Für den Beweis dieses Satzes sei der Leser auf [BLVS⁺99, S.115 ff.] verwiesen.

Für die Cokreise eines orientierten Matroids gelten demnach die Kreisaxiome. Aus diesem Grund werden die Kreisaxiome auch als Cokreisaxiome bezeichnet. Aus dem Rang von \mathcal{M} lässt sich der Rang für das zu \mathcal{M} duale orientierte Matroid \mathcal{M}^* bestimmen. Sei r der Rang von \mathcal{M} . Da wir nur uniforme orientierte Matroide betrachten, hat jeder

Cokreis $X \in \mathcal{C}^*$ genau $r - 1$ Nullen. Somit gilt für alle Kreise X des dualen orientierten Matroids \mathcal{M}^* , dass $|supp(X)| = n - (r - 1)$, also ist $rg(\mathcal{M}^*) = n - (r - 1) + 1 = n - r$. Aus den Betrachtungen in diesem Abschnitt ergibt sich, dass orientierte Matroide gleichermaßen über Mengen von Kreisen, wie auch über Mengen von Cokreisen definiert werden können. Da sich die Mehrzahl der Überlegungen in dieser Arbeit auf Cokreise beziehen, wird im weiteren Verlauf der Zugang zu orientierten Matroiden über Cokreise gewählt.

1.4 Operationen auf orientierten Matroiden

In diesem Abschnitt werden zwei wichtige Operationen auf orientierten Matroiden vorgestellt: Zum einen das Löschen von Elementen und zum anderen die Kontraktion an einem Element. Beide Operationen werden in Kapitel 5 benutzt, um einen Teil des Beweises der d -Schritt-Vermutung in Dimension 4 auf den Beweis der d -Schritt-Vermutung in Dimension 3 zurückzuführen.

1.4.1 Löschen von Elementen

Definition 1.31 (Minor). Sei $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ ein orientiertes Matroid. Sei weiterhin G die Menge der Elemente, die gelöscht werden und $F = E \setminus G$, dann heißt $\mathcal{M} \setminus G = (F, \mathcal{C}^*(F))$ *Minor* von \mathcal{M} . Die Menge der Cokreise von $\mathcal{M} \setminus F$ entsteht wie folgt aus der Menge der Cokreise von \mathcal{M} :

$$\mathcal{C}^*(F) = \bigcup_{e \in F} \{X \setminus \{e\} \mid X \in \mathcal{C}^*, X_e \neq 0\}$$

Aus der Definition von $\mathcal{C}^*(F)$ folgt, dass die Anzahl der Nullen in einem Cokreis durch das Löschen eines Elements unverändert bleibt. Damit folgt aus der Definition des Ranges eines orientierten Matroids, dass $rg(\mathcal{M}) = rg(\mathcal{M} \setminus F)$. Somit ändert das Löschen eines Elementes nichts am Rang des orientierten Matroids.

Beispiel 1.32. Zur Veranschaulichung wird das Beispiel aus 1.1 fortgesetzt.

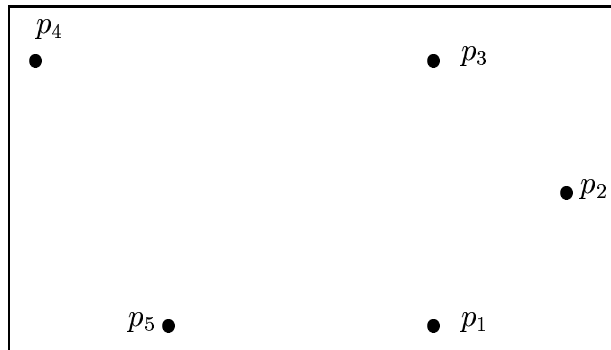


Abbildung 1.8: Punktconfiguration im \mathbb{R}^2

Das zu Abbildung 1.8 zugehörige orientierte Matroid \mathcal{M} hat die folgenden Cokreise:

- | | |
|-------------------|-------------------|
| $(0, 0, +, +, +)$ | $(0, 0, -, -, -)$ |
| $(0, -, 0, +, +)$ | $(0, +, 0, -, -)$ |
| $(0, +, +, 0, +)$ | $(0, -, -, 0, -)$ |
| $(0, +, +, +, 0)$ | $(0, -, -, -, 0)$ |
| $(+, 0, 0, +, +)$ | $(-, 0, 0, -, -)$ |
| $(+, 0, -, 0, +)$ | $(-, 0, +, 0, -)$ |
| $(-, 0, +, +, 0)$ | $(+, 0, -, -, 0)$ |
| $(+, +, 0, 0, +)$ | $(-, -, 0, 0, -)$ |
| $(+, +, 0, -, 0)$ | $(-, -, 0, +, 0)$ |

Wird das Element p_4 gelöscht, entsteht das orientierte Matroid $\mathcal{M} \setminus \{p_4\}$ mit den folgenden Cokreisen:

- | | |
|----------------|----------------|
| $(0, 0, +, +)$ | $(0, 0, -, -)$ |
| $(0, -, 0, +)$ | $(0, +, 0, -)$ |
| $(0, +, +, 0)$ | $(0, -, -, 0)$ |
| $(+, 0, 0, +)$ | $(-, 0, 0, -)$ |
| $(-, 0, +, 0)$ | $(+, 0, -, 0)$ |
| $(+, +, 0, 0)$ | $(-, -, 0, 0)$ |

Es muss nun gezeigt werden, dass durch das Löschen eines Elementes wieder ein orientiertes Matroid entsteht.

Lemma 1.33. *Sei $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ ein orientiertes Matroid und $e \in E$. Dann ist $\mathcal{M} \setminus \{e\}$ ein orientiertes Matroid.*

Beweis. Es ist zu zeigen, dass für $\mathcal{C}^* \setminus \{e\}$ die Cokreisaxiome gelten. Im folgenden sei für jeden Cokreis $X \in \mathcal{C}^* \setminus \{e\}$ der Cokreis $\tilde{X} \in \mathcal{C}^*$ definiert als $\tilde{X}_f = \begin{cases} X_f & f \neq e \\ + \text{ oder } - & \text{sonst} \end{cases}$. X ist also der Cokreis, der aus \tilde{X} entsteht, wenn e gelöscht wird.

(C1) $\emptyset \in \mathcal{C}^* \setminus \{e\}$, nur falls $(0, \dots, 0, \underbrace{+}_e, 0, \dots, 0) \in \mathcal{C}^*$. Dann ist nach (C2) auch $(0, \dots, 0, \underbrace{-}_e, 0, \dots, 0) \in \mathcal{C}^*$ und damit nach (C4) auch $(0, \dots, 0, \underbrace{0}_e, 0, \dots, 0) \in \mathcal{C}^*$. Dies ist ein Widerspruch, da (C1) für \mathcal{C}^* gilt, und daher $\mathbf{0} \notin \mathcal{C}^*$.

(C2) Sei $X \in \mathcal{C}^* \setminus \{e\}$. Dann existiert ein $\tilde{X} \in \mathcal{C}^*$. Da für \mathcal{C}^* die Cokreisaxiome gelten, gibt es ein $\tilde{Y} \in \mathcal{C}^*$, mit $\tilde{X} = -\tilde{Y}$. Zu \tilde{Y} gibt es nach Definition von $\mathcal{C}^* \setminus \{e\}$ ein $Y \in \mathcal{C}^* \setminus \{e\}$. Da $\tilde{X}_f = -\tilde{Y}_f$ f.a. $f \in E$, ist $X_f = -Y_f$, f.a. $f \in E \setminus \{e\}$, und somit $X = -Y$.

(C3) Seien $X, Y \in \mathcal{C}^* \setminus \{e\}$, mit $\text{supp}(X) \subseteq \text{supp}(Y)$. Dann gibt es Cokreise $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{C}^*$ mit $\text{supp}(\tilde{X}) \subseteq \text{supp}(\tilde{Y})$. Dann folgt mit (C3), dass $\tilde{X} = \tilde{Y}$ oder $\tilde{X} = -\tilde{Y}$. Damit gilt $X = Y$ oder $X = -Y$ und somit gilt (C3) für $\mathcal{C}^* \setminus \{e\}$.

(C4) Sei $X, Y \in \mathcal{C}^* \setminus \{e\}$, und sei $f \in X^+ \cap Y^-$. Dann gibt es $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{C}^*$ mit $\tilde{X}^+ \cap \tilde{Y}^- \supseteq X^+ \cap Y^-$. Damit existiert nach (C4) ein $\tilde{Z} \in \mathcal{C}^*$ mit $\tilde{Z}^+ \subseteq \tilde{X}^+ \cup \tilde{Y}^+$ und $\tilde{Z}^- \subseteq \tilde{X}^- \cup \tilde{Y}^-$, für alle $f \in \tilde{X}^+ \cap \tilde{Y}^-$ und somit auch für alle $e \in X^+ \cap Y^-$. Also existiert ein $Z \in \mathcal{C}^* \setminus \{e\}$ mit $Z^+ \subseteq X^+ \cup Y^+$ und $Z^- \subseteq X^- \cup Y^-$. Somit gilt (C4) für $\mathcal{C}^* \setminus \{e\}$. \square

1.4.2 Kontraktion

Definition 1.34. Sei $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ ein orientiertes Matroid und $e \in E$. $\mathcal{M}/\{e\} = (E \setminus \{e\}, \mathcal{C}^*/\{e\})$ bezeichnet das orientierte Matroid, das aus \mathcal{M} durch Kontraktion an e entsteht. Dabei ist die Menge der Cokreise von $\mathcal{M}/\{e\}$ definiert als $\mathcal{C}^*/\{e\} := \{X \setminus \{e\} \mid X \in \mathcal{C}^*, X_e = 0\}$.

Diese Definition besagt, dass alle Cokreise in $\mathcal{C}^*/\{e\}$ genau eine Null weniger haben, als die Cokreise in \mathcal{C}^* . Damit folgt nach der Definition des Ranges eines orientierten Matroids, dass $rg(\mathcal{M}/\{e\}) = rg(\mathcal{M}) - 1$.

Geometrisch gesehen, ist die Kontraktion an einem Element $p \in P \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Projektion aller verbleibenden Elemente von P auf eine Hyperebene durch p , die keinen der anderen Punkte aus P enthält.

Beispiel 1.35. Zur Veranschaulichung der Kontraktion betrachten wir das Beispiel in Abbildung 1.9. Das zu P gehörige orientierte Matroid \mathcal{M} hat die folgenden Cokreise:

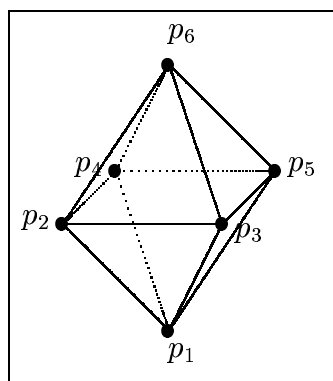


Abbildung 1.9: Punkte aus P

$(0, 0, 0, +, +, +)$ $(0, 0, 0, -, -, -)$
 $(0, +, 0, +, 0, +)$ $(0, -, 0, -, 0, -)$
 $(0, 0, +, 0, +, +)$ $(0, 0, -, 0, -, -)$
 $(0, +, +, 0, 0, +)$ $(0, -, -, 0, 0, -)$
 $(+, +, +, 0, 0, 0)$ $(-, -, -, 0, 0, 0)$
 $(+, 0, 0, +, +, 0)$ $(-, 0, 0, -, -, 0)$
 $(+, 0, +, 0, +, 0)$ $(-, 0, -, 0, -, 0)$
 $(+, +, 0, +, 0, 0)$ $(-, -, 0, -, 0, 0)$
 $(0, -, 0, 0, +, 0)$ $(0, +, 0, 0, -, 0)$
 $(0, 0, +, -, 0, 0)$ $(0, 0, -, +, 0, 0)$
 $(+, 0, 0, 0, 0, -)$ $(-, 0, 0, 0, 0, +)$

Werden alle Punkte aus $P \setminus \{p_6\}$ auf eine Ebene durch p_6 projiziert, entsteht die in Abbildung 1.10 abgebildete Punktkonfiguration:

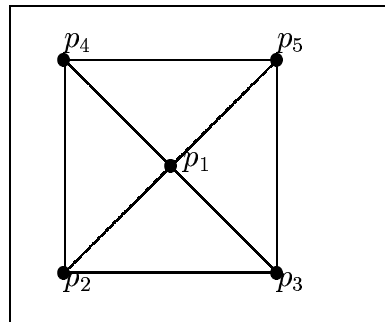


Abbildung 1.10: Kontraktion von P an p_6

Das entstehende orientierte Matroid $\mathcal{M}/\{p_6\}$ hat die Cokreise:

$$\begin{array}{ll}
 (+, +, +, 0, 0) & (-, -, -, 0, 0) \\
 (+, 0, 0, +, +) & (-, 0, 0, -, -) \\
 (+, 0, +, 0, +) & (-, 0, -, 0, -) \\
 (+, +, 0, +, 0) & (-, -, 0, -, 0) \\
 (0, -, 0, 0, +) & (0, +, 0, 0, -) \\
 (0, 0, +, -, 0) & (0, 0, -, +, 0)
 \end{array}$$

Wie bei der Löschooperation muss gezeigt werden, dass durch die Kontraktion an einem Element $e \in E$ wieder ein orientiertes Matroid entsteht. Es gilt also zu zeigen, dass für $\mathcal{C}^*/\{e\}$ die Cokreisaxiome gelten.

Lemma 1.36. *Sei $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ ein orientiertes Matroid, und $e \in E$. Dann ist $\mathcal{M}/\{e\}$ ein orientiertes Matroid.*

Beweis. Im folgenden sei für jeden Cokreis $X \in \mathcal{C}^*/\{e\}$ der Cokreis $\tilde{X} \in \mathcal{C}^*$ definiert als

$$\tilde{X}_f = \begin{cases} X_f & f \neq e \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$X \in \mathcal{C}^*/\{e\}$ ist also der Cokreis, der aus $\tilde{X} \in \mathcal{C}^*$ bei der Kontraktion an e entsteht.

(C1) $\emptyset \in \mathcal{C}^*/\{e\}$ gilt nach Definition von $\mathcal{C}^*/\{e\}$ nur, falls $\emptyset \in \mathcal{C}^*$. Dies ist ein Widerspruch, da für \mathcal{C}^* die Cokreisaxiome gelten, und somit $\emptyset \notin \mathcal{C}^*$. Also gilt $\emptyset \notin \mathcal{C}^*/\{e\}$.

(C2) Sei $X \in \mathcal{C}^*/\{e\}$, zu dem ein $\tilde{X} \in \mathcal{C}^*$ existiert. Da für \mathcal{C}^* die Cokreisaxiome gelten, gibt es ein $\tilde{Y} \in \mathcal{C}^*$, mit $\tilde{X} = -\tilde{Y}$. Zu \tilde{Y} gibt es nach Definition von $\mathcal{C}^*/\{e\}$ ein zugehöriges $Y \in \mathcal{C}^*/\{e\}$. Da $\text{supp}(\tilde{X}) = \text{supp}(X)$ und $\text{supp}(\tilde{Y}) = \text{supp}(Y)$, gilt $X = -Y$ und damit ist (C2) erfüllt.

(C3) Seien $X, Y \in \mathcal{C}^*/\{e\}$, mit $\text{supp}(X) \subseteq \text{supp}(Y)$. Für die zugehörigen Cokreise $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{C}^*$ gilt dann $\text{supp}(\tilde{X}) \subseteq \text{supp}(\tilde{Y})$, da $\text{supp}(\tilde{X}) = \text{supp}(X)$ und $\text{supp}(\tilde{Y}) = \text{supp}(Y)$. Dann folgt mit dem 2.Cokreisaxiom, dass $\tilde{X} = \tilde{Y}$ oder $\tilde{X} = -\tilde{Y}$. Damit gilt $X = Y$ oder $X = -Y$, und somit gilt (C3) für $\mathcal{C}^*/\{e\}$

(C4) Sei $X, Y \in \mathcal{C}^*/\{e\}$, und sei $f \in X^+ \cap Y^-$. Dann gibt es $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathcal{C}^*$ mit $\tilde{X}^+ \cap \tilde{Y}^- = X^+ \cap Y^-$. Damit existiert nach (C4) ein $\tilde{Z} \in \mathcal{C}^*$ mit $\tilde{Z}^+ \subseteq \tilde{X}^+ \cup \tilde{Y}^+$ und $\tilde{Z}^- \subseteq \tilde{X}^- \cup \tilde{Y}^-$. Da $f \neq e$ ist, existiert ein $Z \in \mathcal{C}^*/\{e\}$ mit $Z^+ \subseteq X^+ \cup Y^+$ und $Z^- \subseteq X^- \cup Y^-$. Somit gilt (C3) für $\mathcal{C}^*/\{e\}$. \square

Bemerkung 1.37. Aus den Definitionen der beiden Operationen Kontraktion und Löschen folgt direkt, dass es keine Rolle spielt, in welcher Reihenfolge Elemente gelöscht oder Kontraktionen an ihnen ausgeführt werden. Formal bedeutet dies:

Sei $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ ein orientiertes Matroid, dann ist

$$\mathcal{M} \setminus \{e\}/\{f\} = \mathcal{M}/\{f\} \setminus \{e\}, \text{ f.a. } e, f \in E, e \neq f$$

2 Polytope

In diesem Abschnitt wird eine kurze Einführung in die Theorie der Polytope gegeben. Es werden jedoch nur die für den weiteren Verlauf der Arbeit interessanten Aspekte von Polytopen behandelt. Für weitergehende Studien über Polytope wird der Leser auf [Zie95] verwiesen.

2.1 Einführung in Polytope

Im folgenden sei $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ eine Menge von Punkten, die den \mathbb{R}^d affin aufspannen.

Definition 2.1. Eine Menge P heißt *konvex*, falls sie für je zwei Punkte $p_i, p_j \in P$ auch das Segment $[p_i, p_j] = \{\lambda p_i + (1 - \lambda)p_j \mid 0 \leq \lambda \leq 1\}$ enthält.

Beispiel 2.2. *Die Menge auf der linken Seite der Abbildung 2.1 ist nicht konvex, da das eingezeichnete Segment nicht vollständig enthalten ist. Die Menge auf der rechten Seite dagegen ist konvex.*

Mithilfe aller konvexen Mengen, die P enthalten, kann der Begriff der *konvexen Hülle* von P definiert werden:

Definition 2.3 (Konvexe Hülle). Der Schnitt aller konvexen Mengen, die P enthalten ist die *konvexe Hülle* von P , und wird als $\text{conv}(P) = \bigcap \{M \mid P \subseteq M, M \text{ ist konvex}\}$ geschrieben.

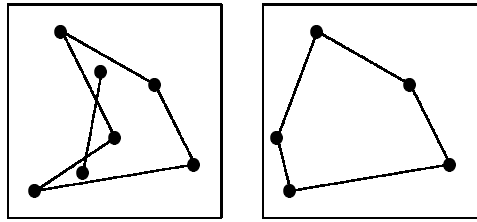


Abbildung 2.1: nicht konvexe und konvexe Punktmenge

Wenn die Punkte von P nicht den ganzen \mathbb{R}^d aufspannen, sondern sich alle auf einer k -dimensionalen Ebene ($k < d$) befinden, ist der Begriff der *affinen Hülle* von Bedeutung.

Definition 2.4 (Affine Hülle). Sei P eine Menge von Punkten, die den \mathbb{R}^d affin aufspannen. Die *affine Hülle* von P ist der Schnitt aller affinen Ebenen, die P enthalten.

Die affine Hülle von P beschreibt den minimaldimensionalen Teilraum von \mathbb{R}^d , der durch die Punkte aus P aufgespannt wird.

Zu Polytopen kann auf zwei verschiedene Arten Zugang gefunden werden. Zum einen können Polytope über konvexe Mengen definiert werden, zum anderen über den Schnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen. Mit dem Beweis, dass beide Ansätze äquivalent sind, beschäftigt sich das erste Kapitel in [Zie95].

Definition 2.5 (\mathcal{V} -Polytop). Ein \mathcal{V} -Polytop ist die konvexe Hülle einer endlichen Menge von Punkten im \mathbb{R}^d .

Definition 2.6 (\mathcal{H} -Polytop). Ein \mathcal{H} -Polyeder ist der Schnitt von endlich vielen abgeschlossenen Halbräumen. Ein \mathcal{H} -Polytop ist ein \mathcal{H} -Polyeder, das abgeschlossen ist, d.h. dass keinen Strahl der Form $\{x + ty | y \geq 0\}$ f.a. $y \neq 0$ enthält.

Beispiel 2.7. Die Abbildung 2.2 zeigt die beiden verschiedenen Definitionen von Polytopen. Auf der linken Seite ist die Beschreibung eines Polytops über die konvexe Hülle einer Punktmenge P abgebildet, auf der rechten Seite ist ein Polytop abgebildet, das über



Abbildung 2.2: Zwei verschiedene Definitionen eines Polytops

den Schnitt endlich vieler abgeschlossener Halbräume entstanden ist.

Definition 2.8 (Dimension). Die Dimension eines Polytops $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ist die Dimension der affinen Hülle von P .

Für ein $p \in P$, $c \in \mathbb{R}$ und $\lambda \in (\mathbb{R}^d)^*$ bezeichnet $\lambda p \leq c$ eine lineare Ungleichung. Offensichtlich können Polytope mit Hilfe von linearen Ungleichungen beschrieben werden, da ein abgeschlossener Halbraum über solch eine lineare Ungleichung beschrieben werden kann.

Eine lineare Ungleichung heißt *gültig* für ein Polytop P , falls sie für alle Punkte p aus P erfüllt ist. Lineare Ungleichungen werden benutzt, um die *Seiten* eines Polytops zu beschreiben.

Definition 2.9 (Seite eines Polytops). Sei P ein Polytop und $\lambda p \leq c$ eine gültige lineare Ungleichung. Dann beschreibt $F = P \cap \{x \in \mathbb{R}^d \mid \lambda x = c\}$ eine Seite von P .

Die Dimension von F ist die Dimension der affinen Hülle von F .

Eine k -dimensionale Seite eines Polytops wird allgemein als k -Seite bezeichnet. Eine 0-Seite heißt *Knoten*, eine 1-Seite heißt *Kante*, eine $(d-2)$ -Seite heißt *Grat* und eine $(d-1)$ -Seite heißt *Seite* eines Polytops.

Bemerkung 2.10. Sowohl das Polytop P selber auch als die leere Menge bilden jeweils eine Seite von P . Die lineare Ungleichung $0p \leq 0$ definiert die Seite P , da $0x = 0$ für alle

$x \in \mathbb{R}^d$, wo hingegen die lineare Ungleichung $0x \leq -1$ die Seite \emptyset definiert, da $0x \neq -1$ für alle $x \in \mathbb{R}^d$.

2.2 Wege in Polytopen

Im Hinblick auf Kapitel 3 beschäftigt sich dieser Abschnitt mit verschiedenen Arten von Wegen in einem Polytop P .

Definition 2.11. Eine Folge von Knoten v_1, \dots, v_k eines Polytops P heißt Knotenweg in P , falls es Kanten e_1, \dots, e_{k-1} gibt, derart, dass v_i und v_{i+1} in der Kante e_i enthalten sind.

Eine Folge von Seiten F_1, \dots, F_k eines Polytops P heißt Seitenweg in P , falls es Grate G_1, \dots, G_{k-1} gibt, derart, dass $G_i = F_i \cap F_{i+1}$.

Die Länge eines Weges ist die Anzahl der besuchten Knoten bzw. Seiten.

Beispiel 2.12. *Wege in einem Polytop: In Abbildung 2.3 ist auf der linken Seite zeigt einen Weg über die Seiten und auf der rechten Seite ein Weg über die Knoten eines Polytops eingezeichnet.*

Im folgenden wird ein Knotenweg vereinfacht als Weg bezeichnet, und ein Weg über Seiten explizit als Seitenweg.

Betrachtet man die kürzesten Wege zwischen je zwei Knoten aus P und bildet über deren Länge das Maximum, so erhält man den *Durchmesser* von P . Formal wird dieser wie folgt definiert:

Definition 2.13 (Durchmesser). Sei P ein Polytop und V die Menge der Knoten von P .

$\delta(P) = \max_{v_i, v_j \in V} \{\min\{|w| \mid w \text{ ist Weg von } v_i \text{ nach } v_j \text{ in } P\}\}$ ist der *Durchmesser* von P .

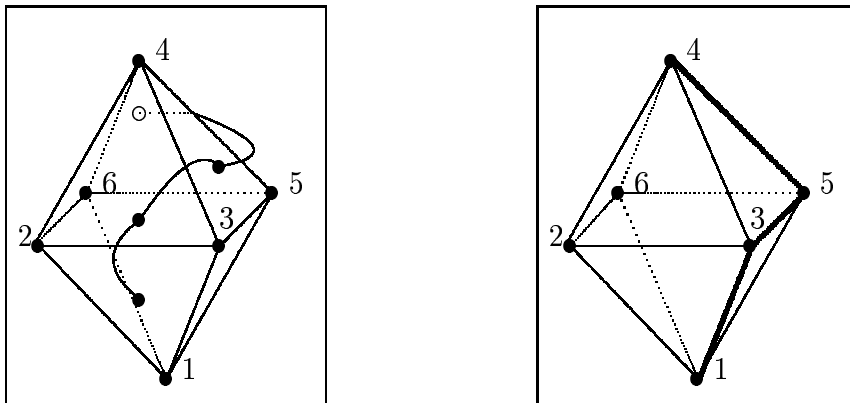


Abbildung 2.3: Seitenweg und Knotenweg

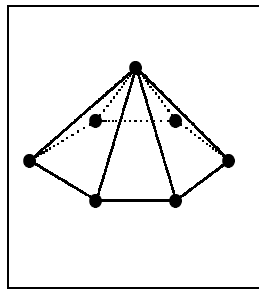


Abbildung 2.4: Polytop mit Durchmesser 2

Beispiel 2.14. In dem Polytop in Abbildung 2.4 ist es möglich, zwischen je zwei Knoten einen Weg der Länge ≤ 2 zu finden. Daher ist der Durchmesser dieses Polytops $\delta(P) = 2$.

2.3 Simpliziale und einfache Polytope

In diesem Abschnitt werden zwei Gruppen von Polytopen behandelt: die simplizialen und die einfachen Polytope. Beide Arten von Polytopen haben gemeinsam, dass sie eine sehr regelmäßige Struktur haben, und es somit leichter ist, Aussagen über diese Polytope zu machen. In Kapitel 3 wird gezeigt, dass es ausreicht, die Hirsch-Vermutung für einfache

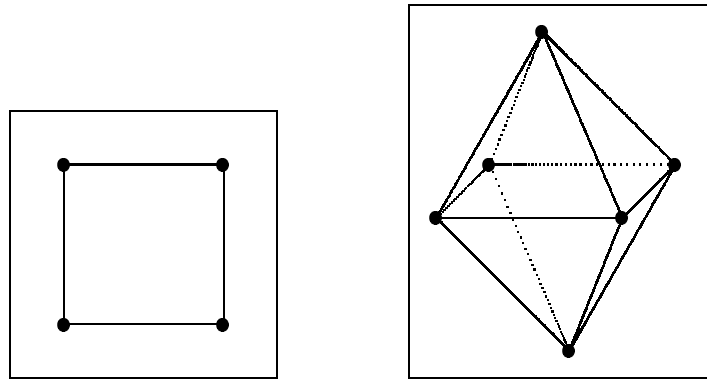


Abbildung 2.5: 2-dimensionales und 3-dimensionales Kreuzpolytop

Polytope zu zeigen. Die regelmäßige Struktur solcher Polytope macht es erst möglich, die in Kapitel 4 genannte Beweisidee zu verwenden, um die d -Schritt-Vermutung zu beweisen.

2.3.1 Simpliciale Polytope

Definition 2.15 (Simplex). Ein d -Simplex ist die affine Hülle von $d + 1$ affin unabhängigen Punkten im \mathbb{R}^n , $n > d$.

Ein 0-Simplex ist somit ein Punkt, ein 1-Simplex eine Gerade, ein 2-Simplex ein Dreieck, und ein 3-Simplex ist ein Tetraeder.

Definition 2.16 (Simpliziales Polytop). Sei P ein Polytop im \mathbb{R}^d . Falls jede k -Seite ein k -Simplex ist, heißt das Polytop *simpliziales Polytop*.

Beispiel 2.17. Die bekannteste Gruppe von simplizialen Polytopen ist die der Kreuzpolytope. Dabei ist das d -dimensionale Kreuzpolytop wie folgt definiert:

$C_d^\Delta := \{x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{i=0}^d |x_i| \leq 1\} = \text{conv}\{e_1, -e_1, \dots, e_d, -e_d\}$ Das 2-dimensionale Kreuzpolytop ist ein Quadrat, das 3-dimensionale Kreuzpolytop ein Oktaeder.

Für jedes simpliziale Polytop gilt, dass jede Seite genau d Knoten enthält, da sie nach

Definition ein d -Simplex ist.

Da für eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage gilt, dass nicht mehr als $d+1$ Punkte auf einer d -dimensionalen Hyperebene liegen, ist die konvexe Hülle einer Punktmenge in allgemeiner Lage ein simpliziales Polytop.

2.3.2 Einfache Polytope

Die zweite wichtige Klasse von Polytopen ist die der *einfachen Polytope*.

Definition 2.18 (einfaches Polytop). Sei P ein Polytop im \mathbb{R}^d . Falls jeder Knoten an genau d Seiten anliegt, so heißt P *einfaches Polytop*.

Beispiel 2.19. Die bekannteste Gruppe von einfachen Polytopen ist die des d -dimensionalen Würfels:

$$C_d = \{x \in \mathbb{R}^d \mid -1 \leq x_i \leq 1\} = \text{conv}\{-1, 1\}^d$$

Falls $P \subseteq \mathbb{R}^d$, $d \geq 3$ ein Polytop ist, das sowohl einfach, als auch simplizial ist, dann ist P ein Simplex.

Eine weitere wichtige Art von einfachen Polytopen ist die *Dantzigfigur*. Wie in Kapitel 3 beschrieben wird, reicht es aus, die Hirsch-Vermutung für Dantzigfiguren zu beweisen. Diese Variante der Hirsch-Vermutung ist bekannt als *d-Schritt-Vermutung*.

Definition 2.20 (Dantzigfigur). Sei P ein einfaches Polytop im \mathbb{R}^d mit genau $2d$ Seiten. Zwei Knoten v_1 und v_2 heißen *antipodal*, falls $v_1 = \bigcap\{F_1, \dots, F_d\}$ und $v_2 = \bigcap\{F_{d+1}, \dots, F_{2d}\}$, und $\{F_1, \dots, F_d\} \cap \{F_{d+1}, \dots, F_{2d}\} = \emptyset$.

Ein Tripel (P, v_1, v_2) heißt *Dantzigfigur*, falls P ein einfaches Polytop im \mathbb{R}^d mit genau $2d$ Seiten ist, und v_1 und v_2 antipodal sind.

Beispiel 2.21. Der d -dimensionale Würfel zusammen mit den Knoten $(-1, \dots, -1)$ und $(1, \dots, 1)$ ist eine Dantzigfigur.

2.4 Polare Polytope

Polare Polytope werden oft auch als duale Polytope bezeichnet, doch um zu verdeutlichen, dass die Dualität in der Polytopetheorie nicht mit der Dualität von orientierten Matroiden zu verwechseln ist, wird der von G. Ziegler in [Zie95, Kapitel 2.3] verwendete Begriff des polaren Polytops benutzt.

Bisher wurden immer Polytope im affinen Raum \mathbb{R}^d betrachtet. Um polare Polytope zu definieren, wird der zu \mathbb{R}^d duale Raum $(\mathbb{R}^d)^*$ betrachtet. Der duale Raum $(\mathbb{R}^d)^*$ ist die Menge aller affinen Funktionen $f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. Jeder Zeilenvektor mit Elementen aus \mathbb{R} der Länge d bildet eine solche affine Funktion.

Definition 2.22 (Polares Polytop). Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ ein Polytop. Das *polare Polytop* zu P ist definiert als:

$$P^\Delta = \{c \in (\mathbb{R}^d)^* \mid cx \leq 1 \text{ für alle } x \in P\}$$

Beispiel 2.23. Sei $P \subseteq \mathbb{R}^2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Dann ergeben sich die folgenden affinen Funktionen:

$$f_1(c_1, c_2) = c_2 - 1$$

$$f_2(c_1, c_2) = 2c_1 + 2c_2 - 1$$

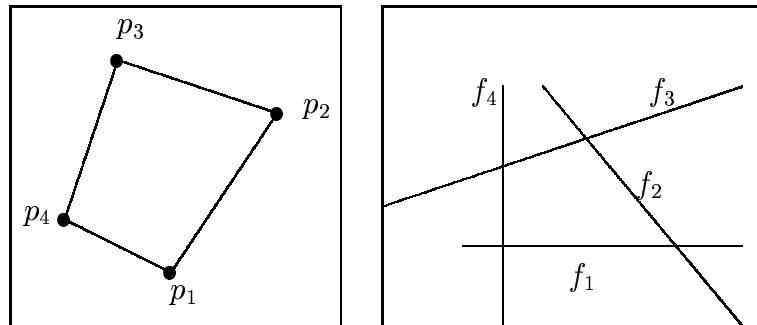
$$f_3(c_1, c_2) = -c_1 + 3c_2 - 1$$

$$f_4(c_1, c_2) = -2c_1 - 1$$

Nach Definition 2.22 ist dann

$P^\Delta = \{c \in (\mathbb{R}^2)^* \mid f_i \leq 0 \text{ für alle } 1 \leq i \leq 4\}$. Abbildung 2.6 zeigt das Polytop P und das zu P polare Polytop P^Δ .

Die in 2.3.1 und 2.3.2 eingeführten simplizialen bzw. einfachen Polytope sind über das Polaritätskonzept miteinander verbunden. So ist jedes polare Polytop P^Δ zu einem simplizialen Polytop P ein einfaches Polytop und umgekehrt. Ist P ein simpliziales Polytop mit Dimension d , dann enthält jede Seite genau d Knoten. Da durch das Dualitätskonzept zwischen \mathbb{R}^d und $(\mathbb{R}^d)^*$ jede Seite von P mit einem Knoten von P^Δ identifiziert wird,

Abbildung 2.6: P und P^Δ

und umgekehrt jeder Knoten von P einer Seite von P^Δ entspricht, ist jeder Knoten von P^Δ in genau d Seiten enthalten. Daher ist P^Δ ein einfaches Polytop.

3 Die Hirsch-Vermutung

Die Hirsch-Vermutung wurde 1957 von Warren M. Hirsch aufgestellt. Sie beschäftigt sich mit der Frage, wie sich der Durchmesser eines konvexen Polytops im \mathbb{R}^d in Abhängigkeit zu der Anzahl der Seiten des Polytops verhält.

Vermutung 3.1 (Hirsch-Vermutung). *Sei P ein d -Polytop mit genau n Seiten. Sei $\Delta(d, n)$ der Durchmesser von P . Dann ist $\Delta(d, n) \leq n - d$.*

3.1 Äquivalente Vermutungen

Im Laufe der Zeit wurden immer mehr Vermutungen bekannt, die zur Hirsch-Vermutung äquivalent sind. Einige davon sind Spezialisierungen der Hirsch-Vermutung, andere sind nicht mehr über Polytope beschrieben, sondern benutzen andere mathematische Strukturen.

Zunächst kann gezeigt werden, dass es für den Beweis der Hirsch-Vermutung ausreichend ist, einfache Polytope zu betrachten:

Vermutung 3.2 (Hirsch-Vermutung). *Sei G der Graph eines einfachen d -Polytops mit genau n Seiten. Sei $\Delta(d, n)$ der Durchmesser von G . Dann ist $\Delta(d, n) \leq n - d$.*

In dem speziellen Fall, dass $n = 2d$ ist, beschreibt das Polytop eine Dantzigfigur, da jedes einfache Polytop mit $2d$ Seiten ein Paar antipodaler Knoten haben muss. Für

Dantzigfiguren ist die Hirsch-Vermutung als *d-Schritt-Vermutung* bekannt. Da der d -dimensionale Würfel genau $2d$ Seiten, und Durchmesser d hat, ist $\Delta(d, 2d) \geq d$. Der d -dimensionale Würfel gibt somit eine untere Schranke für $\Delta(d, 2d)$ an. Zusammen mit der Bedingung aus der Hirsch-Vermutung folgt dann die Aussage der *d-Schritt-Vermutung*:

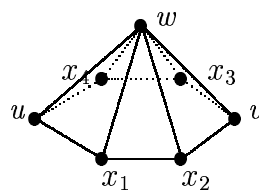
Vermutung 3.3 (*d-Schritt-Vermutung*). *Sei D eine Dantzigfigur mit Dimension d . Sei $\Delta(d, n)$ der Durchmesser von D , dann ist $\Delta(d, 2d) = d$.*

Wie Victor Klee und David W. Walkup zeigten [KW67], gilt sogar, dass aus der *d-Schritt-Vermutung* die Hirschvermutung folgt. Daher sind die beiden Vermutungen äquivalent.

Eine Vermutung, die sich nicht mit der Länge eines Weges zwischen zwei Knoten u und v , sondern mit den besuchten Flächen auf einem solchen Weg beschäftigt, ist die von Victor Klee und Philip Wolfe aufgestellte „*non-revisiting path conjecture*“:

Vermutung 3.4 (*non-revisiting path conjecture*). *Es seien u und v zwei beliebige Knoten in einem einfachen Polytop P . Dann gibt es in P einen Pfad von u nach v , der keine Fläche erneut besucht, die er schon einmal verlassen hat.*

Beispiel 3.5. *Zur Verdeutlichung der „non-revisiting path conjecture“ betrachten wir das folgende Beispiel:*



Der kürzeste Weg von u nach v wäre in diesem Fall der Weg u, w, v . Dieser verlässt aber im ersten Schritt die Fläche $F = \text{conv}(\{x_1, x_2, v, x_3, x_4, u\})$ und betritt sie im letzten Schritt wieder. Der etwas längere Weg u, x_1, x_2, v erfüllt jedoch die Bedingungen der *nonrevisiting path conjecture*.

Victor Klee und David W. Walkup zeigten [KW67], dass die „non-revisiting path conjecture“ äquivalent zur Hirsch-Vermutung ist.

Alle bisher genannten Vermutungen basierten auf dem Begriff des Polytops. Wie die nächste Vermutung zeigt, kann der Inhalt der Hirsch-Vermutung auch mit Hilfe anderer mathematischen Strukturen beschrieben werden. Die im folgenden diskutierte *Simplex-Austausch-Vermutung* benutzt dazu *simpliziale Basen*.

Definition 3.6. Sei $\mathbf{B} \subseteq \mathbb{R}^{d-1}$ mit d Vektoren: $\mathbf{B} = \{b_1, b_2, \dots, b_d\}$. Falls die Vektoren von \mathbf{B} einen $(d-1)$ -Simplex formen, der $\mathbf{0}$ enthält, dann heißt \mathbf{B} *simpliziale Basis* von \mathbb{R}^{d-1}

Vermutung 3.7 (Simplex-Austausch-Vermutung). Für je zwei *simpliziale Basen* \mathbf{B} und \mathbf{B}' des \mathbb{R}^{d-1} in allgemeiner Lage, existiert eine Sequenz $\mathbf{B}_0, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_d$ von *simplizialen Basen* des \mathbb{R}^{d-1} , mit $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0$ und $\mathbf{B}' = \mathbf{B}_d$. Dabei ist $\mathbf{B}_{i+1} := (\mathbf{B}_i \setminus \{b\}) \cup \{b'\}$, mit $b \in \mathbf{B}$ und $b' \in \mathbf{B}'$

Die Simplex Austauschvermutung besagt also, dass es für je zwei Mengen \mathbf{B} und \mathbf{B}' von Vektoren, die kein Element gemeinsam haben und jeweils einen $(d-1)$ -Simplex formen, immer möglich ist, von \mathbf{B} zu \mathbf{B}' zu gelangen, indem in jedem Schritt ein Element aus \mathbf{B} gelöscht wird, und ein Element aus \mathbf{B}' hinzugefügt wird. Dabei wird nie ein Element gelöscht, das vorher schon hinzugefügt wurde.

Beispiel 3.8. Seien

$$\mathbf{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, 1 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} \text{ und}$$

$$\mathbf{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

zwei *simpliziale Basen* des \mathbb{R}^2 .

Die Basen $\mathbf{B}_0 = \mathbf{B}$,

$$\mathbf{B}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\},$$

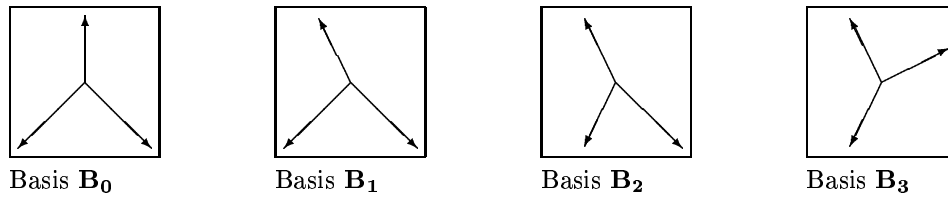


Abbildung 3.1: Folge von simplizialen Basen

$$\mathbf{B}_2 = \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \right\},$$

$\mathbf{B}_3 = \mathbf{B}'$ bilden eine Folge von simplizialen Basen, die die Bedingungen der Simplex-Austausch-Vermutung erfüllen (siehe Abbildung 3.1):

Die Simplex-Austausch-Vermutung wurde von Klee und Kleinschmidt [KK87] über eine Äquivalenz zwischen simplizialen Paare $(\mathbf{B}, \mathbf{B}')$ und Dantzigfiguren (P, v_1, v_2) bewiesen.

In diesem Abschnitt wurden Vermutungen vorgestellt, die äquivalent zur Hirschvermutunung sind. Das folgende Diagramm erläutert die Situation und zeigt die Verhältnisse der einzelnen Vermutungen zueinander.

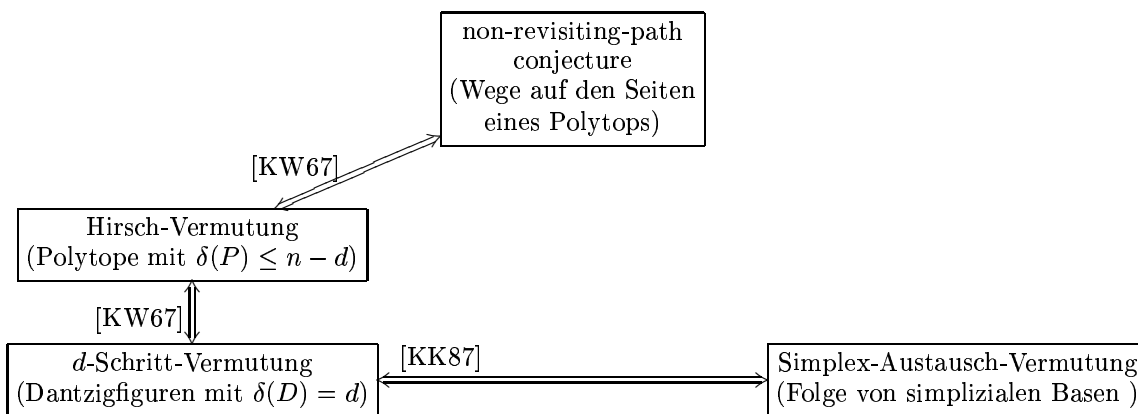


Abbildung 3.2: Äquivalente Vermutungen zur Hirschvermutunung

4 Orientierte Matroide und die d -Schritt-Vermutung

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die d -Schritt-Vermutung mit Hilfe von orientierten Matroiden zu formulieren. Dazu wird zunächst die *Cokreisvermutung* aufgestellt und gezeigt, dass sie für alle realisierbaren orientierten Matroide äquivalent zu d -Schritt-Vermutung ist.

Für die Cokreisvermutung wird ein orientiertes Matroid $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ mit Rang $d + 1$ betrachtet, wobei der Übersicht halber die Menge E in die beiden Mengen $\{x_1, \dots, x_d\}$ und $\{y_1, \dots, y_d\}$ aufgeteilt wird.

4.1 Cokreisvermutung

Vermutung 4.1 (Cokreisvermutung). Sei $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ ein uniformes orientiertes Matroid, mit $E = \{x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d\}$ und $rg(\mathcal{M}) = d + 1$. Seien ausserdem $C_0, C_d \in \mathcal{C}^*$ mit $C_0 = (\{y_1, \dots, y_d\}, \emptyset)$ und $C_d = (\{x_1, \dots, x_d\}, \emptyset)$. Dann gibt es eine Folge von Cokreisen $C_0, \dots, C_d \in \mathcal{C}^*$, mit $C_i^- = \emptyset$ und $C_i^+ = (C_{i-1}^+ \cup \{x_j\}) \setminus \{y_k\}$, wobei $x_j \notin C_{i-1}^+$ und $y_k \in C_{i-1}^+$ gilt.

Anschaulich besagt die Cokreisvermutung, dass es für jedes orientierte Matroid eine Folge von positiven Cokreisen C_0, \dots, C_d gibt, wobei $C_0 = (0, \dots, 0, +, \dots, +)$ und $C_d =$

$(+, \dots, +, 0, \dots, 0)$ ist, und C_i aus C_{i-1} entsteht, indem ein Element unter den ersten d Elementen von 0 auf + und ein Element unter den letzten Elementen von + auf 0 gesetzt wird.

Definition 4.2. Eine Folge von positiven Cokreisen C_m, \dots, C_n heißt *Cokreisfolge* von m nach n , falls $C_i^+ = (C_{i-1}^+ \cup \{x_j\}) \setminus \{y_k\}$, mit $x_j \notin C_{i-1}^+$ und $y_k \in C_{i-1}^+$, für alle $m < i \leq n$.

Ein Cokreis C heißt *Element einer Cokreisfolge*, falls es eine Cokreisfolge C_m, \dots, C_n und ein $m \leq i \leq n$ gibt, mit $C = C_i$.

Beispiel 4.3. *Die Folge*

$$\begin{aligned} C_0 &= (0, 0, 0, 0, +, +, +, +) \\ C_1 &= (0, 0, +, 0, 0, +, +, +) \\ C_2 &= (+, 0, +, 0, 0, +, +, 0) \\ C_3 &= (+, 0, +, +, 0, +, 0, 0) \\ C_4 &= (+, +, +, +, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

ist eine Cokreisfolge.

Die Folge

$$\begin{aligned} C_0 &= (0, 0, 0, 0, +, +, +, +) \\ C_1 &= (0, 0, +, 0, 0, +, +, +) \\ C_2 &= (+, 0, +, 0, 0, +, +, 0) \\ C_3 &= (+, 0, +, +, +, 0, 0, 0) \\ C_4 &= (+, +, +, +, 0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

hingegen ist keine Cokreisfolge, da $C_3^+ = (C_2^+ \cup \{4, 5\}) \setminus \{6, 7\}$ ist.

Die Bedingungen der Cokreisvermutung in 4.1 können noch weiter spezialisiert werden, ohne die Aussagekraft der Cokreisvermutung einzuschränken.

Vermutung 4.4 (spezielle Cokreisvermutung). Sei $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ ein uniformes orientiertes Matroid, mit $E = \{x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d\}$ und $\text{rg}(\mathcal{M}) = d + 1$. Seien ausserdem $C_0, C_d \in \mathcal{C}^*$ mit $C_0 = (\{y_1, \dots, y_d\}, \emptyset)$ und $C_d = (\{x_1, \dots, x_d\}, \emptyset)$. Dann gibt es

eine Permutation π und in dem orientierten Matroid $\widetilde{\mathcal{M}} = (E, \widetilde{\mathcal{C}}^*) = \mathcal{M} \circ \pi$ eine Folge von Cokreisen $C_0, \dots, C_d \in \widetilde{\mathcal{C}}^*$, mit $C_i^- = \emptyset$ und $C_i^+ = (C_{i-1}^+ \cup \{x_i\}) \setminus \{y_i\}$.

Die spezielle Cokreisvermutung besagt also, dass es zu jedem orientierten Matroid eine Permutation π gibt, so dass die Folge von positiven Cokreisen die folgende Form hat: Um von C_{i-1} zu C_i zu gelangen, wird genau das i -te Element von 0 auf +, und das Element an Stelle $d+i$ von + auf 0 gesetzt. Die Folge $(0, 0, 0, 0, 0, +, +, +)$, $(+, 0, 0, 0, 0, +, +, +)$, $(+, +, 0, 0, 0, 0, +, +)$, $(+, +, +, 0, 0, 0, 0, +)$, $(+, +, +, +, 0, 0, 0, 0)$ erfüllt die Bedingungen der speziellen Cokreisvermutung.

Lemma 4.5. *Die spezielle Cokreisvermutung ist äquivalent zur Cokreisvermutung.*

Beweis. Trivialerweise erfüllt die spezielle Cokreisvermutung die Bedingungen der Cokreisvermutung. Es bleibt also zu zeigen, dass zu jedem orientierten Matroid \mathcal{M} , das die Bedingungen der Cokreisvermutung (4.1) erfüllt, eine Permutation π gefunden werden kann, die zusammen mit \mathcal{M} die Bedingungen der speziellen Cokreisvermutung (4.4) erfüllt.

Sei C_0, \dots, C_d eine Cokreisfolge, mit $C_i^+ = (C_{i-1}^+ \cup \{x_{j_i}\}) \setminus \{y_{k_i}\}$, mit $x_{j_i} \notin C_{i-1}^+$ und $y_{k_i} \in C_{i-1}^+$. Dann wird die Permutation π wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} \pi(x_{j_i}) &= x_i, \text{ für alle } 1 \leq i \leq d \\ \pi(y_{k_i}) &= y_i, \text{ für alle } 1 \leq i \leq d \end{aligned}$$

Die Cokreisfolge, die entsteht, wenn π auf C_0, \dots, C_d angewendet wird, erfüllt offensichtlich die Bedingungen der speziellen Cokreisvermutung. □

4.2 Orientierte Matroide und Polytope

In diesem Abschnitt wird der Zusammenhang zwischen orientierten Matroiden und Polytopen erläutert. Die hier gewonnenen Erkenntnisse werden im nächsten Abschnitt verwendet, um die Äquivalenz zwischen der Cokreisvermutung für realisierbare orientierte

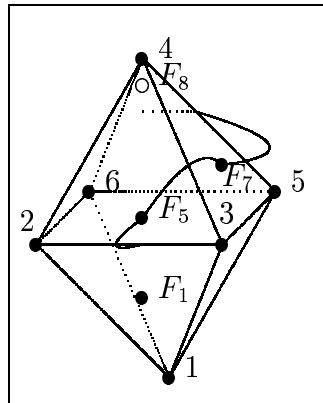


Abbildung 4.1: Weg in einem Polytop über seine Seiten

Matroide und der d -Schritt-Vermutung zu beweisen.

Die folgenden Überlegungen beziehen sich nur auf simpliziale Polytope.

Sei $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\} \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Menge von Punkten des \mathbb{R}^d in allgemeiner Lage. Sei weiterhin $\tilde{P} = \text{conv}(P)$ ein simpliziales Polytop im \mathbb{R}^d und $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ das orientierte Matroid bezüglich P mit $E = \{1, \dots, |P|\}$. Ein positiver Cokreis $C \in \mathcal{C}^*$ entspricht einer Hyperebene H , die von Punkten aus P definiert ist und für die gilt, dass alle Punkte aus $P \setminus H$ auf einer Seite von H liegen. Somit definiert H eine Seite von \tilde{P} . Die positiven Cokreise von \mathcal{M} korrespondieren also mit den Seiten von \tilde{P} .

Zwischen zwei Seiten F und G existiert genau dann ein Grat (f, g) , wenn $|F \cap G \cap P| = d - 1$, d.h. die Mengen $F \cap P$ und $G \cap P$ unterscheiden sich genau in einem Punkt. Sind X und Y die zu F bzw. G korrespondierenden Cokreise, so gibt es genau dann einen Grat (f, g) zwischen F und G , falls genau zwei Elemente $i, j \in E$ mit $X(i) = 0, Y(i) = 1$ und $X(j) = 1, Y(j) = 0$ existieren und für alle anderen Elemente $k \in E$ $X(k) = Y(k)$ gilt.

Im Polytop \tilde{P} gibt es daher genau dann einen Seitenweg F_0, \dots, F_k , wenn es in \mathcal{M} eine Folge von positiven Cokreisen C_0, \dots, C_k gibt, wobei C_i der zu F_i korrespondierende positive Cokreis ist und $|C_i^+ \cap C_{i-1}^+| = d - 1$ gilt.

Beispiel 4.6. Wir betrachten den in Abbildung 4.1 gezeigten Oktaeder:

In diesem Polytop gibt es 8 positive Cokreise (bzw. Flächen):

$C_1 = (0, 0, 0, +, +, +)$ korrespondiert zu $F_1 = \text{conv}(\{1, 2, 3\})$

$C_2 = (0, 0, +, +, +, 0)$ korrespondiert zu $F_2 = \text{conv}(\{1, 2, 6\})$

$C_3 = (0, +, 0, +, 0, +)$ korrespondiert zu $F_3 = \text{conv}(\{1, 3, 5\})$

$C_4 = (0, +, +, +, 0, 0)$ korrespondiert zu $F_4 = \text{conv}(\{1, 5, 6\})$

$C_5 = (+, 0, 0, 0, +, +)$ korrespondiert zu $F_5 = \text{conv}(\{2, 3, 4\})$

$C_6 = (+, 0, +, 0, +, 0)$ korrespondiert zu $F_6 = \text{conv}(\{2, 4, 6\})$

$C_7 = (+, +, 0, 0, 0, +)$ korrespondiert zu $F_7 = \text{conv}(\{3, 4, 5\})$

$C_8 = (+, +, +, 0, 0, 0)$ korrespondiert zu $F_8 = \text{conv}(\{4, 5, 6\})$

Zu dem eingezeichneten Weg F_1, F_5, F_7, F_8 gibt es die Folge C_1, C_5, C_7, C_8 von positiven Cokreisen, die die oben genannten Eigenschaften hat.

4.3 Äquivalenz von Cokreisvermutung und d -Schritt-Vermutung

Bevor bewiesen wird, dass die Cokreisvermutung für realisierbare orientierte Matroide äquivalent zur d -Schritt-Vermutung ist, werden diejenigen orientierten Matroide kategorisiert, die die Voraussetzungen der Cokreisvermutung erfüllen. Dazu wird der Begriff des *Matroidpolytop* eingeführt.

Definition 4.7. Ein orientiertes Matroid $\mathcal{M} = (E, \mathcal{V}^*)$ heißt *Matroidpolytop*, falls es für jedes $e \in E$ einen positiven Covektor $V \in \mathcal{V}^*$ gibt, mit $V^+ = E \setminus \{e\}$.

Ein Matroidpolytop mit Rang $d - 1$ beschreibt genau dann ein d -Polytop, falls es realisierbar ist [BLVS⁺99, S.377]. Die Cokreisvermutung ist eine Aussage über Matroidpolytope, da jedes orientierte Matroid \mathcal{M} , das die Cokreise C_0 und C_d enthält, ein Matroidpolytop ist, wie der folgende Satz sagt:

Satz 4.8. Sei $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ ein orientiertes Matroid, mit $E = \{x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d\}$ und $C_0 = (\{y_1, \dots, y_d\}, \emptyset), C_d = (\{x_1, \dots, x_d\}, \emptyset) \in \mathcal{C}^*$. Dann ist \mathcal{M} ein Matroidpolytop.

Beweis. Nach Lemma 5.10 gibt es positive Cokreise

$C_{1:i}$, mit

$$C_{1:i}^+ = (C_0^+ \cup \{x_i\}) \setminus \{y_k\}, \text{ f.a. } i \in \{1, \dots, d\}$$

und analog Cokreise

$C_{(d-1):i}$, mit

$$C_{(d-1):i}^+ = (C_d^+ \cup \{y_i\}) \setminus \{x_k\}, \text{ f.a. } i \in \{1, \dots, d\}.$$

Zu zeigen ist, dass mit Hilfe der Covektoraxiome die positiven Covektoren $V_{x_i} = (E \setminus \{x_i\}, \emptyset)$ und $V_{y_i} = (E \setminus \{y_i\}, \emptyset)$ f.a. $i \in \{1, \dots, d\}$ erzeugt werden können.

Für jedes $i \in \{1, \dots, d\}$ wird der positive Covektor V_{x_i} wie folgt erzeugt:

$$V_{x_i} = C_{1:1} \circ \dots \circ C_{1:(i-1)} \circ C_{1:(i+1)} \circ \dots \circ C_{1:d} \circ C_0.$$

Nach dem 3. Covektoraxiom muss somit der Covektor V_{x_i} in der Menge der Covektoren von \mathcal{M} enthalten sein.

Analog wird für jedes $i \in \{1, \dots, d\}$ der positive Covektor V_{y_i} wie folgt erzeugt:

$$V_{y_i} = C_{(d-1):1} \circ \dots \circ C_{(d-1):(i-1)} \circ C_{(d-1):(i+1)} \circ \dots \circ C_{(d-1):d} \circ C_d.$$

Nach dem 3. Covektoraxiom muss daher auch jeder der Covektoren V_{y_i} in der Menge der Covektoren von \mathcal{M} enthalten sein. Also ist \mathcal{M} ein Matroidpolytop. \square

In der Cokreisvermutung ist also eine Aussage über Matroidpolytope formuliert. Da nicht jedes Matroidpolytop realisierbar ist, stellt die Cokreisvermutung eine Verallgemeinerung zur d -Schritt-Vermutung dar. Da aber zu jedem realisierbaren Matroidpolytop mit Rang $d + 1$ und $2d$ Elementen eine Dantzigfigur mit Dimension d existiert, ist die Cokreisvermutung für realisierbare orientierte Matroide äquivalent zur d -Schritt-Vermutung.

Satz 4.9. *Sei $D = (\text{conv}(P), v, w)$ eine Dantzigfigur im \mathbb{R}^d mit genau $2d$ Seiten. D erfüllt die Bedingungen der d -Schritt-Vermutung genau dann, wenn es ein realisierbares orientiertes Matroid $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$, mit $E = \{x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d\}$ und $\text{rg}(\mathcal{M}) = d + 1$ gibt, das die Bedingungen der Cokreisvermutung erfüllt.*

Beweis. Sei $D = (\text{conv}(P), v, w)$ eine Dantzigfigur im \mathbb{R}^d mit genau $2d$ Seiten, die die Bedingungen der d -Schritt-Vermutung erfüllt. Dann gibt es in D einen Weg $v = v_0, v_1, \dots, v_d = w$ der Länge d . In dem zu D dualen Polytop $D^\Delta = \text{conv}(P')$ korrespondiert jede Ecke zu einer Seite von D . Daher hat D^Δ genau $2d$ Ecken. Ausserdem definiert der Weg in D einen Seitenweg F_0, \dots, F_d der Länge d in D^Δ . Sei $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$, $E = \{x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d\}$ das durch P' induzierte orientierte Matroid. Dann gibt es eine Folge von positiven Cokreisen C_0, \dots, C_d , mit $|C_i^+ \cap C_{i-1}^+| = d - 1$. Da v und w antipodal sind, gilt $C_0 \cap C_d = \emptyset$. Da die Folge von C_0 nach C_d genau d Cokreise enthält, muss $|C_i^+ \cap \{x_1, \dots, x_d\}| = |C_i^+ \cap \{x_1, \dots, x_d\}| + 1$ sein. Daher gilt die Cokreisvermutung.

Für die andere Richtung sei $P = \{x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d\} \subseteq \mathbb{R}^d$ und $\mathcal{M} = (P, \mathcal{C}^*)$ das zugehörige orientierte Matroid, welches die Bedingungen der Cokreisvermutung erfüllt. Daher gibt es eine Folge von Cokreisen C_0, \dots, C_d , mit $C_0^+ = \{y_1, \dots, y_d\}$, $C_d^+ = \{x_1, \dots, x_d\}$ und $C_i^+ = (C_{i-1}^+ \cup \{x_j\}) \setminus \{y_k\}$, $x_j \notin C_{i-1}^+$, $y_k \in C_{i-1}^+$. Somit gilt $|C_i^+ \cap \{x_1, \dots, x_d\}| = |C_{i-1}^+ \cap \{x_1, \dots, x_d\}| + 1$ und damit $|C_i^+ \cap C_{i-1}^+| = d - 1$. Also gibt es in dem Polytop $Q = \text{conv}(P)$ einen Seitenweg F_0, \dots, F_d der Länge d , mit $F_0 \cap F_d = \emptyset$. Das zu Q polare Polytop Q^Δ hat genau $2d$ Seiten und es gibt einen Weg v_0, \dots, v_d der Länge d . Da $F_0 \cap F_d = \emptyset$, sind v_0 und v_d antipodal. Damit ist (Q^Δ, v_0, v_d) eine Dantzigfigur, die die Bedingungen der d -Schritt-Vermutung erfüllt. \square

4.4 Orientierte Matroide und die Simplex-Austausch-Vermutung

Genauso wie die Hirsch-Vermutung mit Hilfe von orientierten Matroiden beschrieben werden kann, ist es auch möglich, eine Vermutung über orientierte Matroide zu formulieren, die äquivalent zur Simplex-Austausch-Vermutung ist. Im Gegensatz zur Hirsch-Vermutung wird für die Simplex-Austausch-Vermutung die Definition von orientierten Matroiden über Kreise verwendet.

Falls $P \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage ist und $\mathcal{M} = (P, \mathcal{C})$ das zugehörige orientierte Matroid mit Rang $d - 1$, dann entspricht jede simpliziale Basis \mathbf{B} von \mathbb{R}^d einem positiven Kreis $C \in \mathcal{C}$ von \mathcal{M} . Eine Folge von simplizialen Basen $\mathbf{B}_0, \dots, \mathbf{B}_{d+1}$ von P , die die Bedingungen der Simplex-Austausch-Vermutung erfüllen, korrespondiert somit zu einer Folge von positiven Kreisen C_0, \dots, C_{d+1} aus \mathcal{C} , mit $C_{i+1}^+ = (C_i^+ \cup \{x\}) \setminus \{y\}$, $x \notin C_i^+$, $y \in C_i^+$.

Wegen ihres Dualitätsprinzips lässt sich mit Hilfe orientierter Matroide ein kompakter Beweis für die Äquivalenz zwischen der Hirsch-Vermutung und der Simplex-Austausch-Vermutung liefern.

Satz 4.10. *Die Simplex-Austausch-Vermutung ist äquivalent zur Hirsch-Vermutung.*

Beweis. Da die Hirsch-Vermutung äquivalent zur d -Schritt-Vermutung ist, reicht es, die Äquivalenz zwischen d -Schritt-Vermutung und Simplex-Austausch-Vermutung zu zeigen.

Sei $P \subseteq \mathbb{R}^d$ eine Menge von Punkten in allgemeiner Lage und v_1, v_2 antipodal.

$D = (P, v_1, v_2)$ ist Dantzigfigur und $v_1 = u_0, u_1, \dots, u_{d-1}, u_d = v_2$ ein Weg der Länge d .

\iff

Im zu D polaren, simplizialen Polytop D^Δ gibt es einen Seitenweg der Länge d .

\Leftrightarrow

Im orientierten Matroid $\mathcal{M} = (V(D^\Delta), \mathcal{C}^*)$, mit Rang $d+1$ gibt es eine Folge C_0, \dots, C_d von Cokreisen, die die Cokreisvermutung erfüllen.

\Leftrightarrow

Im zu \mathcal{M} dualen orientierten Matroid \mathcal{M}^* mit Rang $d-1$ gibt es eine Folge von Kreisen C_0, \dots, C_d , mit $C_{i+1}^+ = (C_i^+ \cup \{x\}) \setminus \{y\}$, $x \notin C_i^+$, $y \in C_i^+$.

\Leftrightarrow

Es gibt eine Folge $\mathbf{B}_0, \dots, \mathbf{B}_d$ von simplizialen Basen des \mathbb{R}^d , die die Bedingungen der Simplex-Austausch-Vermutung erfüllen. □

Das Diagramm aus Kapitel 3 kann nun um die Cokreisvermutung erweitert werden. Hierbei werden die Cokreisvermutung und die Cokreisvermutung für realisierbare orientierte Matroide als zwei verschiedene Vermutungen abgebildet, um noch einmal zu verdeutlichen, dass die Cokreisvermutung für beliebige orientierte Matroide nur eine Verallgemeinerung der Hirschvermutung ist. Um eine Äquivalenz angeben zu können, muss die Cokreisvermutung auf realisierbare orientierte Matroide beschränkt werden. Das erweiterte Diagramm zeigt ausserdem, dass die Cokreisvermutung für realisierbare orientierte Matroide verwendet werden kann, um einen einfachen Beweis für die Äquivalenz zwischen d -Schritt-Vermutung und Simplex-Austausch-Vermutung anzugeben.

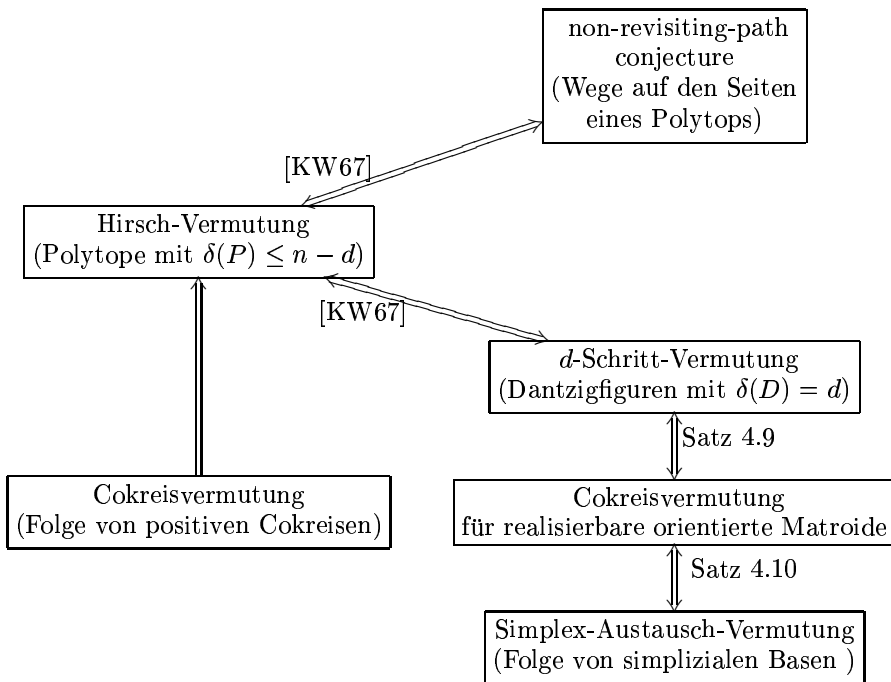


Abbildung 4.2: Äquivalente Vermutungen zur Hirschvermutung

5 Beweis der Cokreisvermutung für Dimension 3 und 4

In diesem Abschnitt wird die Cokreisvermutung für die Dimensionen 3 und 4 bewiesen. Zu Beginn wird der Beweisansatz für den allgemeinen Fall erläutert. Dann werden Lemmata bewiesen, die für orientierte Matroide mit beliebigem Rang gelten. Der Beweis der Cokreisvermutung läßt sich in einzelne Schritte unterteilen. Für einige Schritte können die allgemein gezeigten Lemmata verwendet werden. Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden die Schritte, die nicht über diese Lemmata bewiesen werden können für die Dimensionen 3 und 4 gezeigt.

5.1 Beweisidee für die Cokreisvermutung

Wir beschränken uns bei allen Betrachtungen auf die spezielle Cokreisvermutung, da diese nach Abschnitt 4.1 äquivalent zur Cokreisvermutung ist.

Um die Cokreisvermutung zu beweisen, wird zunächst angenommen, dass sie nicht gilt, d.h. dass ein orientiertes Matroid \mathcal{M} existiert, das ein Gegenbeispiel zur Cokreisvermutung ist. Falls \mathcal{M} ein Gegenbeispiel zur Cokreisvermutung ist, dann muss ein Index k existieren, so dass es eine Cokreisfolge von 0 nach k gibt, die die Bedingungen von Lemma 4.4 erfüllen, aber keinen weiteren Cokreis. Die folgende Behauptung formuliert

genau diese Aussage.

Behauptung 5.1. Sei $E = \{x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d\}$ eine Menge und $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ ein orientiertes Matroid. Angenommen, \mathcal{M} ist ein Gegenbeispiel zur Cokreisvermutung, d.h. es gibt eine Cokreisfolge C_0, \dots, C_k , $k \leq d-1$, aber keinen weiteren Cokreis C_{k+1} , so dass C_0, \dots, C_k, C_{k+1} eine Cokreisfolge ist. Ist also $C_k^+ = \{y_{k+1}, \dots, y_d, x_1, \dots, x_k\}$, dann darf es keinen Cokreis $C_{k+1} = (C_{k+1}^+, C_{k+1}^-)$ mit $C_{k+1}^+ = (\{y_{k+1}, \dots, y_d, x_1, \dots, x_k\} \cup \{x_i\}) \setminus \{y_j\}$, f.a. $i, j \in \{k+1, \dots, d\}$ geben.

Um die Cokreisvermutung zu beweisen, muss die Behauptung 5.1 widerlegt werden. Dazu wird angenommen, dass es keinen der oben definierten Cokreise C_{k+1} gibt. Dann muss es einen Cokreis \tilde{C}_{k+1} geben, mit $\tilde{C}_{k+1}^- \neq \emptyset$ und $\text{supp}(\tilde{C}_{k+1}) = \text{supp}(C_{k+1})$. Für jeden möglichen dieser Cokreise \tilde{C}_{k+1} wird nun gezeigt, dass entweder ein Cokreis existieren muss, der unter der Bedingung, dass es die Cokreise C_0, \dots, C_k gibt, nicht existieren darf, oder dass \mathcal{M} kein Gegenbeispiel sein kann, falls \tilde{C}_{k+1} existiert.

Es folgen nun technische Lemmata, die in den Beweisen für die Cokreisvermutung in Dimension 3 und 4 verwendet werden. Vor jedem Lemma wird zunächst der Inhalt des Lemmas anschaulich beschrieben und durch ein Beispiel verdeutlicht, bevor es formal angegeben wird. Da die Beweise zu den Lemmata auf dem 4. Cokreisaxiom basieren, wird, um in den Beispielen das 4. Cokreisaxiom kompakt anwenden zu können, die folgende Notation eingeführt:

Definition 5.2. Seien C und \tilde{C} Cokreise eines orientierten Matroids \mathcal{M} . Dann bezeichnet $C \diamond \tilde{C}$ den Cokreis, der durch Anwendung des 4. Cokreisaxioms entsteht. Wird der Wert eines Elements nicht eindeutig festgelegt, dann wird an die entsprechende Stelle ein ? geschrieben.

Beispiel 5.3. Für die beiden Cokreise $C = (+, 0, 0, 0, 0, 0, +, +, -, +)$ und $\tilde{C} = (+, +, 0, 0, 0, 0, 0, +, +, +)$ ist $C \diamond \tilde{C} = (+, +, 0, 0, 0, 0, +, +, 0, +)$, da

$$\begin{aligned} C^- \cap \tilde{C}^+ &= \{9\} \\ C^+ \cup \tilde{C}^+ \setminus \{9\} &= \{1, 2, 7, 8, 10\} \\ C^- \cup \tilde{C}^- \setminus \{9\} &= \emptyset \end{aligned}$$

Für die Cokreise $C = (+, 0, 0, 0, 0, 0, +, -, -, +)$ und $\tilde{C} = (+, +, 0, 0, 0, 0, 0, +, +, +)$ ist $C \diamond \tilde{C} = (+, +, 0, 0, 0, 0, +, ?, 0, +)$, falls das Element 9 aus $C^- \cap \tilde{C}^+$ gewählt wird, da

$$\begin{aligned} 9 &\in C^- \cap \tilde{C}^+ \text{ und} \\ C^+ \cup \tilde{C}^+ \setminus \{9\} &= \{1, 2, 7, 8, 10\} \\ C^- \cup \tilde{C}^- \setminus \{9\} &= \{8\} \end{aligned}$$

Da das Element 8 sowohl in $C^+ \cup \tilde{C}^+ \setminus \{9\}$ als auch in $C^- \cup \tilde{C}^- \setminus \{9\}$ enthalten ist, kann ihm kein Wert zugewiesen werden.

Wird das Element 8 aus $C^- \cap \tilde{C}^+$ gewählt, so ist $C \diamond \tilde{C} = (+, +, 0, 0, 0, 0, +, 0, ?, +)$.

Definition 5.4. Sei C_0, \dots, C_k eine Cokreisfolge. Ein Cokreis C_{k+1} heißt *verletzender Cokreis*, falls $C_{k+1}^- \neq \emptyset$ und der Cokreis $\tilde{C}_{k+1} = (C_{k+1}^+ \cup C_{k+1}^-, \emptyset)$ Element einer Cokreisfolge von 0 nach $k+1$ wäre.

In jedem der folgenden Lemmata wird ein Fall ausgeschlossen, wie so ein verletzender Cokreis aussehen kann.

Das folgende Lemma 5.6 behandelt den Fall, dass $y_i \in C_{k+1}^-$ und zeigt, dass es dann auch immer einen Cokreis \tilde{C}_{k+1} geben muss, bei dem es kein y_i gibt, das negativ ist. Zunächst wird aber die Aussage noch durch ein Beispiel verdeutlicht.

Beispiel 5.5. Angenommen, es gibt die Cokreise $(+, -, 0, 0, 0, 0, +, -)$ und $(+, 0, 0, 0, 0, +, +, +)$. Dann muss es auch den Cokreis $(+, -, 0, 0, 0, 0, +, -) \diamond (+, 0, 0, 0, 0, +, +, +) = (+, -, 0, 0, 0, +, +, 0) =: C$ geben. Für diesen Cokreis gilt $C^- \cap \{y_1, \dots, y_4\} = \emptyset$.

Falls es die Cokreise $(+, -, 0, 0, 0, 0, -, -)$ und $(+, 0, 0, 0, 0, +, +, +)$ gibt, dann gibt es auch den Cokreis $(+, -, 0, 0, 0, 0, -, -) \diamond (+, 0, 0, 0, 0, +, +, +) = (+, -, 0, 0, 0, +, ?, 0)$. In diesem Fall gibt es entweder $(+, -, 0, 0, 0, +, +, 0) =: C$, mit $C^+ \cap \{y_1, \dots, y_4\} = \emptyset$ oder

es gibt den Cokreis $(+, -, 0, 0, 0, +, -, 0)$.

Falls das der Fall ist, gibt es nach der Induktionsvoraussetzung den Cokreis $(+, -, 0, 0, 0, +, -, 0) \diamond (+, 0, 0, 0, 0, +, +, +) = (+, -, 0, 0, 0, +, 0, +) =: C$, mit $C^- \cap \{y_1, \dots, y_d\} = \emptyset$.

Lemma 5.6. Sei $E = \{x_1, \dots, x_d, y_1, \dots, y_d\}$ und $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ ein orientiertes Matroid. Sei ausserdem $C_k \in \mathcal{C}^*$ mit $C_k^+ = \{x_1, \dots, x_k, y_{k+1}, \dots, y_d\}$ und $C_{k+1} \in \mathcal{C}^*$, mit $C_{k+1}^+ \cup C_{k+1}^- = (C_k^+ \cup \{x_i\}) \setminus \{y_j\}$, $x_i \notin C_k^+$ und $y_j \in C_k^+$, dann gibt es einen Cokreis $\tilde{C}_{k+1} = (\tilde{C}_{k+1}^+, \tilde{C}_{k+1}^-) \in \mathcal{C}^*$, mit $\tilde{C}_{k+1}^+ \cup \tilde{C}_{k+1}^- = (C_k^+ \cup \{x_i\}) \setminus \{y_l\}$, $x_i \notin C_k^+$ und $y_l \in C_k^+$ und $(\tilde{C}_{k+1}^+ \cup \tilde{C}_{k+1}^-) \cap \{y_1, \dots, y_d\} = \emptyset$. Für \tilde{C}_{k+1} gilt, dass $\tilde{C}_{k+1}^- \subset C_k^-$.

Beweis. Der Beweis wird per Induktion über die Größe der Menge $C_{k+1}^- \cap \{y_{k+1}, \dots, y_d\}$ geführt.

Induktionsvoraussetzung: Falls $|C_{k+1}^- \cap \{y_{k+1}, \dots, y_d\}| = n$ gibt es einen Cokreis \tilde{C}_{k+1} , mit $(\tilde{C}_{k+1}^+ \cup \tilde{C}_{k+1}^-) \cap \{y_1, \dots, y_d\} = \emptyset$.

Induktionsanfang: $n = 1$

Angenommen, $C_{k+1}^- \cap \{y_{k+1}, \dots, y_d\} = \{y_l\}$, dann ist

$$\begin{aligned} C_k^+ \cap C_{k+1}^- &= \{y_l\} \\ C_k^+ \cup C_{k+1}^+ \setminus \{y_l\} &\subseteq (C_k^+ \cup \{x_i\}) \setminus \{y_l\} \\ C_k^- \cup C_{k+1}^- \setminus \{y_l\} &\subseteq \{x_i\} \end{aligned}$$

Damit muss es nach dem 4.Cokreisaxiom den Cokreis \tilde{C}_{k+1} mit $\tilde{C}_{k+1}^- \cap \{y_1, \dots, y_d\} = \emptyset$ geben.

Induktionsschritt ($n \rightarrow n + 1$):

Angenommen, $|C_{k+1}^- \cap \{y_{k+1}, \dots, y_d\}| = n + 1$, und $y_l \in C_k^+ \cap C_{k+1}^-$. Dann ist

$$\begin{aligned} C_k^+ \cup C_{k+1}^+ \setminus \{y_l\} &\subseteq (C_k^+ \cup \{x_i\}) \setminus \{y_l\} \\ C_k^- \cup C_{k+1}^- \setminus \{y_l\} &\subseteq C_{k+1}^- \setminus \{y_l\} \end{aligned}$$

Dann muss es nach dem 4.Cokreisaxiom einen Cokreis \tilde{C}_{k+1} geben mit

$$\tilde{C}_{k+1}^+ \subseteq C_k^+ \cup \{x_i\} \setminus \{y_l\}$$

$$\tilde{C}_{k+1}^- \subseteq C_{k+1}^- \setminus \{y_l\}.$$

Für diesen Cokreis gilt $|\tilde{C}_{k+1}^- \cap \{y_{k+1}, \dots, y_d\}| \leq n$.

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es dann auch einen Cokreis \hat{C}_{k+1} mit $\hat{C}_{k+1}^- \cap \{y_1, \dots, y_d\} = \emptyset$. \square

Aus diesem Lemma folgt direkt, dass C_0, \dots, C_k nur dann die längste Cokreisfolge sein kann, wenn es einen Cokreis C_{k+1} gibt, bei dem ein x_i negativ ist. Denn falls das nicht der Fall wäre, gäbe es nach dem eben gesagten auch einen Cokreis \tilde{C}_{k+1} bei dem kein y_j negativ wäre. Somit wäre \tilde{C}_{k+1} Element der Cokreisfolge $C_0, \dots, C_k, \tilde{C}_{k+1}$ und es gäbe eine längere Cokreisfolge als C_0, \dots, C_k . Diese Aussage wird im folgenden Lemma formuliert.

Lemma 5.7. *Angenommen, \mathcal{M} ist ein Gegenbeispiel zur Cokreisvermutung. Sei weiterhin C_0, \dots, C_k die längste mögliche Folge von positiven Cokreisen. Dann kann es keinen Cokreis C_{k+1} geben mit $(C_{k+1}^+ \cup C_{k+1}^-) = C_k^+ \cup \{x_i\} \setminus \{y_j\}$, $x_i \notin C_k^+$, $y_j \in C_k^+$ und $C_{k+1}^- \cap \{x_1, \dots, x_d\} = \emptyset$.*

Beweis. Dies folgt direkt aus Lemma 5.6, da es zu C_{k+1} einen Cokreis \tilde{C}_{k+1} geben muss, mit $\tilde{C}_{k+1}^- \cap \{y_1, \dots, y_d\} = \emptyset$. Daraus folgt dann, dass $\tilde{C}_{k+1}^- = \emptyset$ ist. Damit ist $C_0, \dots, \tilde{C}_{k+1}$ im Widerspruch zur Annahme eine längere Folge von positiven Cokreisen als C_0, \dots, C_k . \square

Für das nächste Lemma wird angenommen, dass es eine Cokreisfolge von 0 nach $d-2$ gibt. Lemma 5.9 behandelt den Fall, dass das neu hinzugefügte x_i negativ ist und zeigt, dass es dann auch einen Cokreis \tilde{C}_{k+1} geben muss, bei dem das neu hinzugefügte x_j positiv ist. Auch dieses Lemma wird zunächst durch ein Beispiel verdeutlicht:

Beispiel 5.8. *Angenommen, es gibt die Cokreise $(+, +, 0, 0, 0, 0, +, +)$,*

$(-, +, -, 0, 0, 0, 0, +)$ und $(+, +, +, +, 0, 0, 0, 0)$. Dann muss es auch den Cokreis

$(-, +, -, 0, 0, 0, 0, +) \diamond (+, +, +, +, 0, 0, 0, 0) = (?, +, 0, +, 0, 0, 0, +) =: C$ geben, mit $C^+ \cap \{x_3, x_4, y_1, \dots, y_4\} = \emptyset$.

Lemma 5.9. Sei $C_{d-2} \in \mathcal{C}^*$ ein Cokreis mit $C_{d-2}^+ = \{x_1, \dots, x_{d-2}, y_{d-1}, y_d\}$ und $C_{d-1} \in \mathcal{C}^*$ ein Cokreis mit $C_{d-1}^+ \cup C_{d-1}^- = (C_{d-2}^+ \cup \{x_i\}) \setminus \{y_j\}$, $x_i \notin C_{d-2}^+$ und $y_j \in C_{d-2}^+$. Dann gibt es einen Cokreis $\tilde{C}_{d-1} \in \mathcal{C}^*$, mit $\tilde{C}_{d-1}^+ \cup \tilde{C}_{d-1}^- = (C_{d-2}^+ \cup \{x_i\}) \setminus \{y_m\}$, $x_l \notin C_{d-2}^+$ und $y_m \in C_{d-2}^+$, und $x_l \in \tilde{C}_{d-2}^+$ und $\tilde{C}_{d-2}^- \cap \{y_1, \dots, y_d\} = \emptyset$.

Beweis. Es kann nach Lemma 5.6 angenommen werden, dass $C_{d-1}^- \cap \{y_1, \dots, y_d\} = \emptyset$.

Angenommen, $C_{d-1}^- \cap \{x_i\} \neq \emptyset$. Dann ist $x_i \in C_{d-1}^+ \cap C_{d-1}^-$ und

$$\begin{aligned} C_{d-1}^+ \cup C_d^+ \setminus \{x_i\} &\subseteq C_d^+ \setminus \{x_i\} \cup \{y_{d-1}, y_d\} \setminus \{y_j\} \\ C_{d-1}^- \cup C_d^- \setminus \{x_i\} &\subseteq C_{d-1}^- \setminus \{x_i\}. \end{aligned}$$

Dann muss es nach dem 4. Cokreisaxiom einen Cokreis \tilde{C}_{d-1} geben, mit $\tilde{C}_{d-1}^+ \subseteq C_d^+ \setminus \{x_i\} \cup \{y_{d-1}, y_d\}$ und $\tilde{C}_{d-1}^- \subseteq C_{d-1}^- \setminus \{x_i\}$. Sei $\tilde{x}_i \in \{x_{d-1}, x_d\}$ mit $\tilde{x}_i \neq x_i$. Dann gilt $\tilde{x}_i \in \tilde{C}_{d-1}^+$ und $\tilde{x}_i \notin C_{d-1}^-$. Somit ist $\tilde{C}_{d-1}^- \cap \{x_{d-1}, x_d, y_1, \dots, y_d\} = \emptyset$. \square

Falls es also eine Cokreisfolge C_0, \dots, C_{d-2} gibt, dann gibt es auch immer einen Cokreis C_{d-1} , bei dem das neu hinzugefügte x_j positiv ist. Daher kann in diesem Fall ein orientiertes Matroid \mathcal{M} nur dann ein Gegenbeispiel sein, wenn $C_{d-1}^- \cap \{x_1, \dots, x_d\} \setminus \{x_j\} \neq \emptyset$.

Das folgende Lemma zeigt, dass es immer eine Cokreisfolge von 0 nach 1 gibt.

Lemma 5.10. Sei $C_0 = (C_0^+, C_0^-)$ ein Cokreis mit $C_0^+ = \{y_1, \dots, y_d\}$ und $C_0^- = \emptyset$. Dann existiert für alle $x_i \in \{x_1, \dots, x_d\}$ ein Cokreis $C_1 \in \mathcal{C}^*$, mit $C_1^+ = (C_0^+ \cup \{x_i\}) \setminus \{y_j\}$, $y_j \in \{y_1, \dots, y_d\}$.

Beweis. Angenommen, es gibt den Cokreis $C_1 = (\{x_i, y_2, \dots, y_d\}, \emptyset)$ nicht. Dann muss es einen Cokreis $\tilde{C}_1 = (\tilde{C}_1^+, \tilde{C}_1^-)$ geben mit $\tilde{C}_1^+ \subset C_1^+$ und $\tilde{C}_1^- = C_1^+ \setminus \tilde{C}_1^+$.

1. Fall: Angenommen, $x_i \in \tilde{C}_1^+$. In Lemma 5.6 wurde gezeigt, dass kein Element aus $\{y_2, \dots, y_d\}$ in \tilde{C}_1^- enthalten sein kann, ohne dass ein Cokreis $\hat{C} \in \mathcal{C}^*$ existiert mit $\hat{C}_1^+ = (C_0^+ \cup \{x_i\}) \setminus \{y_j\}$, $y_j \in \{y_1, \dots, y_d\}$ und $C_1^- = \emptyset$.
2. Fall: Angenommen $x_i \notin \tilde{C}_1^+$. Nach dem 2. Cokreisaxiom muss es einen Cokreis \hat{C}_1 geben mit $\tilde{C}_1^- = -\hat{C}_1^-$. Für \hat{C}_1 gilt dann, dass $x_i \in \hat{C}_1^+$. Somit kann Fall 1 angewendet werden. \square

5.2 Beweis der Cokreisvermutung für Dimension 3

Lemma 5.11 (Cokreisvermutung für Dimension 3). *Die Cokreisvermutung gilt für orientierte Matroide mit Rang 4.*

Beweis. Sei $E = \{x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\}$ die Grundmenge eines orientierten Matroids $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ mit $C_0 = (\{y_1, y_2, y_3\}, \emptyset) \in \mathcal{C}^*$ und $C_3 = (\{x_1, x_2, x_3\}, \emptyset) \in \mathcal{C}^*$. Nach Lemma 5.10 gibt es einen Cokreis $C_1 \in \mathcal{C}^*$ mit $C_1^+ = \{x_1, y_i, y_j\}$, $y_i, y_j \in \{y_1, \dots, y_3\}$ und $C_1^- = \emptyset$. Falls \mathcal{M} ein Gegenbeispiel zur Cokreisvermutung ist, dann darf es keinen Cokreis C_2 geben mit $C_2^+ = (C_1^+ \cup \{x_k\}) \setminus \{y_l\}$, $x_k \in \{x_2, x_3\}$, $y_l \in \{y_i, y_j\}$. Daher muss ein Cokreis \widetilde{C}_2 mit $\widetilde{C}_2^+ \subset C_2^+$ und $\widetilde{C}_2^- = C_2^+ \setminus \widetilde{C}_2^+$ existieren.

1. Fall: $x_1 \in \widetilde{C}_2^+$. Dann gibt es nach Lemma 5.6 und 5.9 einen Cokreis \widehat{C}_2 mit $\widehat{C}_2^- \cap \{x_2, x_3, y_1, y_2, y_3\} = \emptyset$. Damit ist $C_2^- = \emptyset$ und $C_0, C_1, \widehat{C}_2, C_3$ bildet eine Cokreisfolge. Damit ist \mathcal{M} im Widerspruch zur Annahme kein Gegenbeispiel.
 2. Fall: $x_1 \in \widetilde{C}_2^-$. Dann gibt es nach dem 2. Cokreisaxiom einen Cokreis \widehat{C}_2 mit $\widetilde{C}_2 = -\widehat{C}_2$. Für \widehat{C}_2 gilt dann $x_1 \in \widehat{C}_2$. Somit kann der 1. Fall angewendet werden.
-

Bemerkung 5.12. Mit Lemma 5.11 folgt sofort, dass jedes orientierte Matroid mit Rang 4, welches die Cokreise C_0, C_1 und C_3 enthält auch einen Cokreis C_2 enthalten muss, so dass C_0, C_1, C_2, C_3 eine Cokreisfolge ist.

5.3 Beweis der Cokreisvermutung für Dimension 4

Der Beweis der Cokreisvermutung in Dimension 4 ist wesentlich aufwändiger als der Beweis der Cokreisvermutung in Dimension 3, da für Dimension 4 mehr Fälle als für Dimension 3 betrachtet werden müssen. Das folgende Diagramm soll dem Leser helfen, den Überblick zu behalten. Die doppelt umrahmten Kästen stellen die einzelnen Schritte des Beweises dar, d.h. mit jedem umrandeten Kasten wird die Cokreisfolge um einen

weiteren Cokreis länger. Die Aussagen in den einfach umrandeten Kästen sind Hilfsausagen, die für den jeweiligen Schritt benötigt werden. In den runden Kästen stehen die Bedingungen, die ein Cokreis erfüllen muss, damit er in dem entsprechenden Lemma behandelt werden kann.

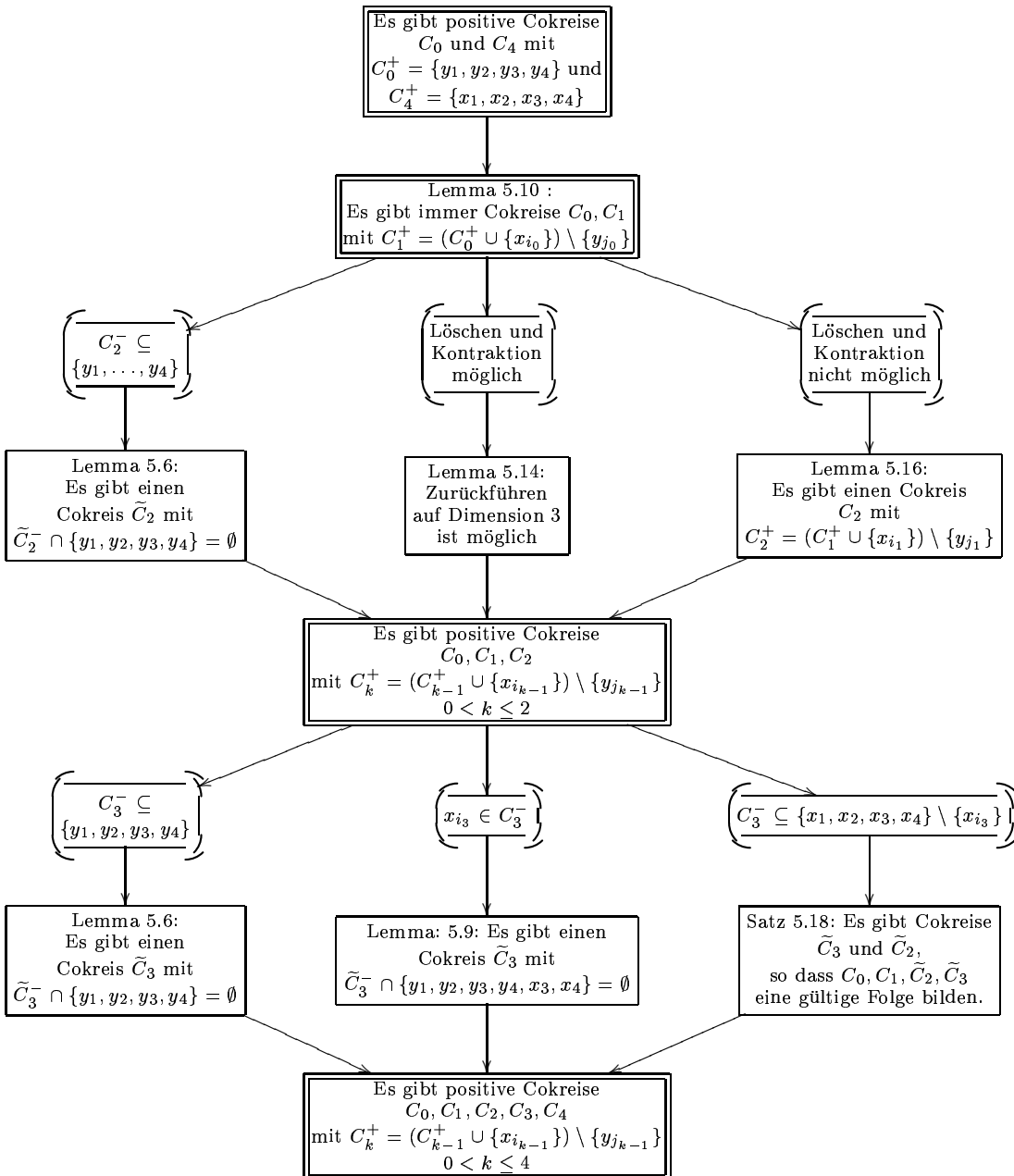


Abbildung 5.1: Skizze des Beweises der Cokreisvermutung in Dimension 4

Für den Beweis der Cokreisvermutung für Dimension 4 lassen sich einige Fälle auf den Beweis der Cokreisvermutung für Dimension 3 zurückführen.

Das folgende Lemma besagt, dass es einen positiven Cokreis C_2 , der Element einer Cokreisfolge ist, geben muss, falls nach dem Löschen eines bestimmten Elementes und der Kontraktion an einem anderen Element Cokreise existieren, die die Bedingungen von 5.12 erfüllen. Dies ist genau dann der Fall, wenn es Cokreise C_0, C_1, C_2, C_3 gibt, so dass alle diese Cokreise an einer Stelle x_i eine Null und an einer Stelle y_j ein Plus haben.

Beispiel 5.13. *Angenommen, in $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ gibt es die Cokreise*

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0, 0, +, +, +, +) \\ &(+, 0, 0, 0, 0, +, +, +) \\ &(+, -, 0, 0, 0, 0, +, +) \\ &(+, +, +, 0, 0, 0, +, 0). \end{aligned}$$

Dann gibt es in dem orientierten Matroid $\mathcal{M}' = \mathcal{M}/\{4\} \setminus \{7\}$ die Cokreise

$$\begin{aligned} &(0, 0, 0, +, +, +) \\ &(+, 0, 0, 0, +, +) \\ &(+, -, 0, 0, 0, +) \\ &(+, +, +, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Nach dem 4.Cokreisaxiom muss der Cokreis $(+, -, 0, 0, 0, +) \diamond (+, +, +, 0, 0, 0) = (+, 0, +, 0, 0, +)$ existieren. Daraus folgt, dass es in \mathcal{M} entweder den Cokreis $(+, 0, +, 0, 0, 0, +, +)$ oder den Cokreis $(+, 0, +, 0, 0, 0, -, +)$ gibt. Im ersten Fall erfüllt $(+, 0, +, 0, 0, 0, +, +)$ die Bedingungen von 5.14, im zweiten Fall muss es nach Lemma 5.6 den Cokreis $(+, 0, +, 0, 0, 0, -, +) \diamond (+, 0, 0, 0, 0, +, +, +) = (+, 0, +, 0, 0, +, 0, +)$ geben, der die Bedingungen von 5.14 erfüllt.

Das folgende Lemma beschreibt die genannte Situation formal:

Lemma 5.14. *Sei $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4\}$ eine Menge und $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ ein orientiertes Matroid, mit $C_0 = (C_0^+, C_0^-) \in \mathcal{C}^*$ und $C_4 = (C_4^+, C_4^-) \in \mathcal{C}^*$, $C_0^+ =$*

$\{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ und $C_4^+ = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$.

Nach Lemma 5.10 ist der erste Schritt zu einem C_1 möglich mit $C_1^+ = (C_0^+ \cup \{x_{i_0}\}) \setminus \{y_{j_0}\}$, $x_{i_0} \notin C_0^+$, $y_{j_0} \in C_0^+$. Genauso ist der vorletzte Schritt zu einem C_3 möglich mit $C_3^+ = (C_4^+ \cup \{y_{j_4}\}) \setminus \{x_{i_4}\}$. Falls $C_0^+ \cap C_1^+ \cap C_3^+ \cap \{y_1, \dots, y_4\} \neq \emptyset$, und $C_0^0 \cap C_1^0 \cap C_3^0 \cap \{x_1, \dots, x_4\} \neq \emptyset$, dann gibt es einen Cokreis C_2 mit $C_2^+ = (C_1^+ \cup \{x_{k_1}\}) \setminus \{y_{l_1}\}$, $x_{k_1} \notin C_1^+$, $y_{l_1} \in C_1^+$.

Beweis. Sei $x \in C_0^0 \cap C_1^0 \cap C_2^0 \cap C_3^0 \cap \{x_1, \dots, x_4\}$ und $y \in C_0^+ \cap C_1^+ \cap C_2^+ \cap C_3^+ \cap \{y_1, \dots, y_4\}$. Es wird das orientierte Matroid $\mathcal{M}' = \mathcal{M} \setminus \{y\} / \{x\}$ betrachtet. Hierbei ist $\mathcal{M}' = (E', \mathcal{C}'^*)$, mit $E' = E \setminus \{x, y\}$. Nach Definition der Operationen Kontraktion und Löschen müssen in \mathcal{C}'^* die folgenden Cokreise enthalten sein:

C'_0 , mit $C'^+_0 = C^+_0 \setminus \{y\}$ und $C'^0_0 = C^0_0 \setminus \{x\}$

C'_1 , mit $C'^+_1 = C^+_1 \setminus \{y\}$ und $C'^0_1 = C^0_1 \setminus \{x\}$

C'_3 , mit $C'^+_3 = C^+_3 \setminus \{y\}$ und $C'^0_3 = C^0_3 \setminus \{x\}$

Nach Lemma 5.11 gibt es dann auch einen Cokreis C'_2 , mit $C'^-_2 = \emptyset$ und

$C'^+_2 = (C'^+_1 \cup \{x_{k_1}\}) \setminus \{y_{l_1}\}$, mit $x \neq x_{k_1} \notin C'^+_1$ und $y \neq y_{l_1} \in C'^+_1$.

Dann muss es einen Cokreis $C_2 \in \mathcal{C}^*$ geben mit $C_2^+ = (C_1^+ \cup \{x_{k_1}\}) \setminus \{y_{l_1}\}$, mit $x_{i_1} \neq x_{k_1} \notin C_1^+$ und $y_{j_1} \neq y_{l_1} \in C_1^+$. Falls $C_2^- = \emptyset$, dann ist C_0, C_1, C_2 eine Cokreisfolge. Falls $C_2^- = \{y_i\}$, gibt es nach Lemma 5.6 einen Cokreis \widetilde{C}_2 , so dass $C_0, C_1, \widetilde{C}_2$ eine Cokreisfolge ist. \square

Falls es nicht möglich ist, den Beweis für Dimension 4 auf den Beweis für Dimension 3 zurückzuführen, weil es nicht die entsprechenden positiven Cokreise gibt, kann gezeigt werden, dass dann der zweite Schritt möglich ist, d.h. dass ein positiver Cokreis C_2 existiert, der Element einer Cokreisfolge ist. Der Beweis dieses Lemmas basiert auf der gleichen Idee wie der Beweis zu Lemma 5.10. Der einzige Unterschied besteht darin, dass nicht, wie in Lemma 5.10, das 4. Cokreisaxiom auf die beiden Cokreise C_0 und C_1 , sondern in diesem Fall auf die Cokreise \widehat{C}_1 und C_1 angewendet wird. Der Inhalt des folgenden Lemmas wird zunächst durch ein Beispiel verdeutlicht:

Beispiel 5.15. *Angenommen, es gibt die Cokreise*

$$C_0 = (0, 0, 0, 0, +, +, +, +)$$

$$C_1 = (+, 0, 0, 0, 0, +, +, +)$$

$$C_3 = (0, +, +, +, 0, 0, 0, +)$$

$$C_4 = (+, +, +, +, 0, 0, 0, 0) \text{ und es gibt den Cokreis}$$

$$\widehat{C}_1 = (0, +, 0, 0, 0, +, -, -).$$

Nach dem 4.Cokreisaxiom muss es dann auch einen Cokreis

$(0, +, 0, 0, 0, +, -, -) \diamond (+, 0, 0, 0, 0, +, +, +) = (+, +, 0, 0, 0, +, 0, ?)$ geben. Falls es den Cokreis $(+, +, 0, 0, 0, +, 0, +)$ gibt, ist dieser Element einer Cokreisfolge. Falls es den Cokreis $(+, +, 0, 0, 0, +, 0, -)$ gibt, muss es nach dem 4.Cokreisaxiom den Cokreis $(+, +, 0, 0, 0, +, 0, -) \diamond (+, 0, 0, 0, 0, +, +, +) = (+, +, 0, 0, 0, +, +, 0)$ geben. Dieser Cokreis ist auch Element einer Cokreisfolge.

Lemma 5.16. *Sei $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4\}$ und $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C})$ ein orientiertes Matroid. Sei weiterhin C_0 ein positiver Cokreis mit $C_0^+ = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$ und C_4 ein positiver Cokreis mit $C_4^+ = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Falls es keine positiven Cokreise C_1 und C_3 gibt, mit $C_0^0 \cap C_1^0 \cap C_3^0 \cap \{x_1, x_2, x_3, x_4\} \neq \emptyset$ und $C_0^+ \cap C_1^+ \cap C_3^+ \cap \{y_1, y_2, y_3, y_4\} \neq \emptyset$ dann gibt es eine Cokreisfolge C_0, C_1, C_2 .*

Beweis. Nach Lemma 5.10 sind der erste und der vorletzte Schritt möglich, d.h. es gibt positive Cokreise C_1 und C_3 , die Elemente einer Cokreisfolge sind. Da $C_1^+ \cap C_0^+ \cap \{y_1, \dots, y_d\} = \emptyset$, muss es einen Cokreis \widehat{C}_1 geben, mit $(\widehat{C}_1^+ \cup \widehat{C}_1^-) = (C_0^+ \cup \{x_{k_0}\}) \setminus \{y_{l_0}\}$, $x_{k_0} \notin C_0^+$, $y_{l_0} \in C_0^+$, für den $\widehat{C}_1^0 \cap C_3^0 \cap \{x_1, \dots, x_4\} \neq \emptyset$ und $(\widehat{C}_1^+ \cup \widehat{C}_1^-) \cap C_3^+ \cap \{y_1, \dots, y_4\} \neq \emptyset$ gilt.

Als erstes wird angenommen, dass $x_{k_0} \in \widehat{C}_1^+$. Es wird nun durch Induktion über $|\widehat{C}_1^-|$ gezeigt, dass immer ein positiver Cokreis C_2 existieren muss, der Element der Cokreisfolge C_0, C_1, C_2 ist.

Induktionsannahme:

Falls $x_{k_1} \in \widehat{C}_1^+$ und $|\widehat{C}_1^-| = n$, dann gibt es einen Cokreis C_2 .

Induktionsanfang: ($n = 1$)

Sei $y_{l_1} \in \widehat{C}_1^-$. Dann ist

$$C_1^+ \cap \widehat{C}_1^- = \{y_{l_1}\}$$

$$(C_1^+ \cup \widehat{C}_1^+) \setminus \{y_{l_1}\} = C_1^+ \cup \{x_k\} \setminus \{y_{l_1}\}$$

$$(C_1^- \cup \widehat{C}_1^-) \setminus \{y_{l_1}\} = \emptyset$$

Somit muss nach dem 4. Cokreisaxiom ein Cokreis $C_2 \in \mathcal{C}^*$ existieren, mit

$$C_2^+ = C_1^+ \cup \{x_{k_1}\} \setminus \{y_{l_1}\}.$$

Induktionsschritt: ($n \rightarrow n + 1$)

Sei $y_{l_1} \in C_1^+ \cap \widehat{C}_1^-$. Dann ist

$$(C_1^+ \cup \widehat{C}_1^+) \setminus \{y_{l_1}\} \subseteq C_1^+ \cup \{x_{k_1}\} \setminus \{y_{l_1}\}$$

$$(C_1^- \cup \widehat{C}_1^-) \setminus \{y_{l_1}\} \subseteq \widehat{C}_1^- \setminus \{y_{l_1}\}$$

Dann gibt es einen Cokreis $\widetilde{C}_2 \in \mathcal{C}^*$, mit $x_{i_1}, x_{k_1} \in \widetilde{C}_2^+$ und $\widetilde{C}_2^- \subset \widehat{C}_1^- \setminus \{y_{l_1}\}$.

Da $\widetilde{C}_2^- \cap \{x_1, \dots, x_4\} = \emptyset$, muss nach Lemma 5.6 ein Cokreis C_2 mit $C_2^- = \emptyset$

existieren. Somit ist die Behauptung bewiesen.

Für den Fall, dass $x_k \notin \widehat{C}_1^+$ ist, wird der negative Cokreis von \widehat{C}_1 betrachtet. Für diesen kann dann Fall 2 angewendet werden. \square

Aus den beiden Lemmata 5.14 und 5.16 folgt, dass es für jedes orientierte Matroid mit Rang 5 eine Cokreisfolge C_0, C_1, C_2 gibt.

Satz 5.17. Sei $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4\}$ und $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ ein orientiertes Matroid. Dann gibt es immer eine Folge von positiven Cokreisen C_0, C_1, C_2 , mit $C_i^+ = (C_{i-1}^+ \cup \{x_j\}) \cup \{y_k\}$, $x_j \notin C_i^+$, $y_k \in C_i^+$, $0 < i \leq 2$.

Beweis. Der Beweis folgt direkt aus Lemma 5.14 und Lemma 5.16. \square

Aus den beiden Sätzen 5.10 und 5.17 folgt, dass für jedes orientierte Matroid im Rang 5 die ersten beiden Schritte möglich sein müssen. Das bedeutet, dass die Cokreise C_0, C_1, C_2 und C_4 immer existieren. Für den Beweis der Cokreisvermutung in Dimension 4 bleibt also zu zeigen, dass auch immer ein Cokreis C_3 existiert, der Element einer Cokreisfolge C_0, C_1, C_2, C_3, C_4 ist.

Satz 5.18. *Die Cokreisvermutung gilt für alle orientierten Matroide mit Rang 5.*

Beweis. Sei $E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4\}$ eine Menge und $\mathcal{M} = (E, \mathcal{C}^*)$ ein orientiertes Matroid. Dann gibt es o.B.d.A. die folgenden Cokreise:

$$C_0, \text{ mit } C_0^+ = \{y_1, y_2, y_3, y_4\}$$

$$C_1, \text{ mit } C_1^+ = \{x_1, y_2, y_3, y_4\}$$

$$C_2, \text{ mit } C_2^+ = \{x_1, x_2, y_3, y_4\}$$

$$C_4, \text{ mit } C_4^+ = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$$

Angenommen, \mathcal{M} ist ein Gegenbeispiel zur Cokreisvermutung. Dann darf es die folgenden Cokreise nicht geben: C_3 , mit $C_3^+ = (C_2^+ \cup \{x_i\}) \setminus \{y_j\}$, $i \notin \{1, 2\}$, $j \in \{3, 4\}$.

Angenommen, es gibt den Cokreis C_3 , mit $C_3^+ = \{x_1, x_2, x_3, y_4\}$ nicht, dann muss es einen Cokreis $\widetilde{C}_3 \in \mathcal{C}^*$ geben, mit $\widetilde{C}_3^+ \subset C_3^+$ und $C_3^- = C_3^+ \setminus \widetilde{C}_3^+$.

Es kann o.B.d.A. angenommen werden, dass $x_1 \in \widetilde{C}_3^+$. Ansonsten muss es nach dem 2. Cokreisaxiom einen Cokreis \widehat{C}_3 geben, mit $\widetilde{C}_3^- = -\widehat{C}_3^+$, und $x_1 \in \widehat{C}_3^+$.

Nach Lemma 5.6 und Lemma 5.9 gibt es immer einen Cokreis \widehat{C}_3 , mit $\widehat{C}_3^- \cap \{x_k, y_1, y_2, y_3, y_4\} = \emptyset$, $k \notin \{x_1, x_2\}$. Somit müssen nur die beiden folgenden Fälle betrachtet werden:

1. Fall: $x_2 \in \widehat{C}_3^+$, dann ist $\widehat{C}_3^- = \emptyset$ und \mathcal{M} kann kein Gegenbeispiel gewesen sein.

2. Fall: $\widehat{C}_3^- = \{x_2\}$, dann ist

$$C_2^+ \cap \widehat{C}_3^- = \{x_2\}$$

$$C_2^+ \cup \widehat{C}_3^+ \setminus \{x_2\} = \{x_1, x_3, y_3, y_4\}$$

$$C_2^- \cup \widehat{C}_3^- \setminus \{x_2\} = \emptyset.$$

Nach dem 4.Cokreisaxiom gibt es einen Cokreis \overline{C}_2 , mit $\overline{C}_2^+ = \{x_1, x_3, y_3, y_4\}$.

Ausserdem ist

$$C_4^+ \cap \widehat{C}_3^- = \{x_2\}$$

$$C_4^+ \cup \widehat{C}_3^+ \setminus \{x_2\} = \{x_1, x_3, x_4, y_4\}$$

$$C_4^- \cup \widehat{C}_3^- \setminus \{x_2\} = \emptyset.$$

Nach dem 4.Cokreisaxiom gibt es dann einen Cokreis \overline{C}_3 , mit $\overline{C}_3^+ = \{x_1, x_3, x_4, y_4\}$.

Damit ist $C_0, C_1, \overline{C}_2, \overline{C}_3, C_4$ eine Cokreisfolge, im Widerspruch dazu, dass \mathcal{M} ein Gegenbeispiel ist. □

6 Fazit

In dieser Arbeit wurde gezeigt, dass die Cokreisvermutung, die für realisierbare orientierte Matroide äquivalent zur d -Schritt-Vermutung ist, für die Dimensionen 3 und 4 gilt. Es stellt sich nun die Frage, ob, und wenn ja, wie diese Beweise für beliebige Dimensionen verallgemeinert werden können.

Die Idee, den Beweis für Dimension d auf den Beweis für Dimension $d - 1$ wie in Lemma 5.14 zurückzuführen, ist nur für bestimmte Fälle möglich. Das liegt daran, dass es in höheren Dimensionen orientierte Matroide geben kann, bei denen es nicht möglich ist, durch Löschen und Kontraktion ein orientiertes Matroid mit kleinerem Rang zu erzeugen, über das Aussagen bezüglich der Cokreisvermutung gemacht werden können.

Doch auch der Beweis für den letzten Schritt, d.h. für die Existenz eines Cokreises C_{d-1} , so dass C_0, \dots, C_d eine Cokreisfolge ist, lässt sich nicht für beliebige Dimensionen verallgemeinern. Schon im Beweis für die Dimension 4 ist es nötig, einen Schritt zurück zu gehen: Um eine vollständige Cokreisfolge zu finden, muss hier die Existenz sowohl des Cokreises \tilde{C}_3 , als auch des Cokreises \tilde{C}_2 gezeigt werden. Für höhere Dimensionen wird dieser Beweis deshalb ungleich komplizierter, weil nicht nur die Existenz der Cokreise \tilde{C}_3 und \tilde{C}_2 (wie für Dimension 4) gezeigt werden muss, sondern auch bewiesen werden muss, dass Cokreise $\tilde{C}_{d-k}, \dots, \tilde{C}_{d-1}$, $1 \leq k \leq d - 1$ existieren, so dass $C_0, \dots, C_{d-k-1}, \tilde{C}_{d-k}, \dots, \tilde{C}_{d-1}, C_d$ eine Cokreisfolge ist.

Abbildungsverzeichnis

1.1	Konvexe Hülle der Punkte aus P	8
1.2	Einbettung der Punkte aus P in den \mathbb{R}^3	9
1.3	Punkte aus P	10
1.4	Vektoren aus \bar{V}	11
1.5	Punkte aus \bar{P}	11
1.6	Schnittpunkt der konvexen Hüllen von X^+ und X^-	13
1.7	Die über f_1 und f_2 definierten Hyperebenen H_1 und H_2	15
1.8	Punktconfiguration im \mathbb{R}^2	21
1.9	Punkte aus P	23
1.10	Kontraktion von P an p_6	24
2.1	nicht konvexe und konvexe Punktmenge	28
2.2	Zwei verschiedene Definitionen eines Polytops	29
2.3	Seitenweg und Knotenweg	31
2.4	Polytop mit Durchmesser 2	31
2.5	2-dimensionales und 3-dimensionales Kreuzpolytop	32
2.6	P und P^Δ	35
3.1	Folge von simplizialen Basen	39
3.2	Äquivalente Vermutungen zur Hirschvermutung	39

Abbildungsverzeichnis

4.1	Weg in einem Polytop über seine Seiten	43
4.2	Äquivalente Vermutungen zur Hirschvermutung	49
5.1	Skizze des Beweises der Cokreisvermutung in Dimension 4	57

Literaturverzeichnis

- [BLV78] R. G. Bland and M. Las Vergnas. Orientability of matroids. *J. Combinatorial Theory, Ser.B 24*, pages 94–123, 1978.
- [BLVS⁺99] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, and G. Ziegler. *Oriented Matroids*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications 46. Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 1999.
- [FL78] J. Folkman and J. Lawrence. Oriented matroids. *J. Combinatorial Theory, Ser.B 25*, pages 199–236, 1978.
- [KK87] V. Klee and P. Kleinschmidt. The d-step conjecture and its relatives. *Math. Oper. Res.12*, pages 718–755, 1987.
- [KW67] Victor Klee and David W. Walkup. The d-step conjecture for polyhedra of dimension $d < 6$. *Acta Math. 133*, pages 53–78 (84,86,102), 1967.
- [Zie95] Günter M. Ziegler. *Lectures on Polytopes*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, New York, Berlin, Heidelberg, 1995.