

# Orientierte Matroide mit wenigen Mutationen

Sarah Johanna Renkl

10. Juni 2003

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einführung</b>	<b>4</b>
<b>2</b>	<b>Motivation und Grundlagen</b>	<b>6</b>
2.1	Matroide und orientierte Matroide . . . . .	6
2.2	Projektive Geometrie . . . . .	9
<b>3</b>	<b>Orientierte Matroide Definitionen und Darstellungen</b>	<b>12</b>
3.1	Chirotope . . . . .	12
3.2	Kreise und Cokreise . . . . .	14
3.3	Arrangements von Pseudo-Hyperbenen . . . . .	16
3.3.1	Das Theorem von Folkman und Lawrence . . . . .	16
3.3.2	Hyperlinien-Sequenzen . . . . .	18
3.4	Eigenschaften orientierter Matroide . . . . .	21
3.4.1	Realisierbarkeit . . . . .	21
3.4.2	Dualität . . . . .	22
3.5	Operationen auf orientierten Matroiden . . . . .	23
3.6	Reorientierungsklassen . . . . .	24

<b>4</b>	<b>Mutationen in Orientierten Matroiden</b>	<b>25</b>
4.1	Definition . . . . .	25
4.2	Mutationen im Dualen . . . . .	27
4.3	Das Theorem von Shannon . . . . .	29
4.4	Das $X(8)$ . . . . .	31
4.5	Euklidische orientierte Matroide . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Mutationen und inseparable Elemente</b>	<b>34</b>
5.1	Inseparable Paare . . . . .	34
5.2	Mutationen und inseparable $k$ -Mengen . . . . .	35
<b>6</b>	<b>Ein-Element-Erweiterungen und Mutationen</b>	<b>38</b>
6.1	Zerschneiden von Mutationen . . . . .	38
6.2	Lexikographische Erweiterungen . . . . .	40
<b>7</b>	<b>Konstruktionen im Rang 4</b>	<b>43</b>
7.1	$n$ Elemente und $n-1$ Mutationen . . . . .	44
7.2	$4n$ Elemente und $3n+1$ Mutationen . . . . .	44
7.3	Kleinstes Gegenbeispiel im Rang 4 . . . . .	46
<b>8</b>	<b>Eine Konstruktion für den allgemeinen Fall</b>	<b>48</b>
8.1	$n-1/n$ . . . . .	48
8.2	Die Konstruktion mit lexikographischen Erweiterungen . . . . .	50
8.3	Ein Beispiel . . . . .	51
<b>9</b>	<b>Software</b>	<b>54</b>

<b>10 Fazit und offene Fragen</b>	<b>56</b>
<b>A Notation</b>	<b>58</b>
<b>B Das <math>X(8)</math></b>	<b>60</b>

# 1

## Einführung

Orientierte Matroide sind als Abstraktion aus verschiedenen mathematischen Gebieten hervorgegangen. Dazu gehören u.a. Lineare Algebra (Punkt-Konfigurationen in Vektorräumen), Graphentheorie (gerichtete Graphen) und Arrangements von Pseudogeraden. Mit orientierten Matroiden kann man viele Eigenschaften dieser Objekte auf einer rein kombinatorischen Ebene betrachten. So lassen sich zum Beispiel Optimierungsprobleme ebenso wie Aussagen über lineare Abhängigkeiten, Flächenzusammenhang, Konvexität und Dualität in der Sprache der orientierten Matroide formulieren.

Ursprünglich geht der Begriff der orientierten Matroide zurück auf Robert Bland, Jon Folkman, Michel Las Vergnas und Jim Lawrence, die ungefähr zur gleichen Zeit von verschiedenen Gebieten (Polytope, Graphentheorie, Lineare Programmierung) zur gleichen Abstraktion gelangten, siehe [2, Bland, Las Vergnas], [7, Folkman, Lawrence].

Älter als die Theorie der orientierten Matroide ist die Untersuchung von Arrangements von Geraden und Pseudogeraden in der projektiven Ebene. Diese Arrangements führen zu orientierten Matroiden im Rang 3. Besonders interessant im Kontext dieser Arbeit ist die Frage nach der minimalen Anzahl von Dreiecken, die ein solches Arrangement haben kann. Im Modell der orientierten Matroide entsprechen die Dreiecke den sogenannten *Mutationen*.

Während Levi schon 1926 zeigte [8, Levi], dass jede Pseudogerade in einem Arrangement von  $n$  Geraden an drei Dreiecken anliegt und das Ar-

rangement insgesamt  $n$  Dreiecke beinhalten muss, ist die Frage nach einer scharfen unteren Schranke für die Anzahl der Mutationen in einem orientierten Matroid bis heute offen.

Mutationen in orientierten Matroiden sind aus verschiedenen Gründen interessant. So entsprechen sie im geometrischen Modell der Pseudo-Hyper-ebenen-Arrangements den simplizialen Zellen maximaler Dimension (im Rang 3 also genau den Dreiecken). Außerdem stellt eine Mutation eine Möglichkeit dar, ein orientiertes Matroid lokal zu verändern und so weitere orientierte Matroide zu erzeugen. Eine offene Vermutung von Las Vergnas lautet, dass man durch diese lokalen Veränderungen, also das Umklappen von Mutationen, alle möglichen orientierten Matroide erzeugen kann. Dies würde auch insbesondere bedeuten, dass jedes orientierte Matroid mindestens eine Mutation besitzt. Für den realisierbaren Fall und im Rang  $\leq 3$  trifft dies zu.

Inzwischen gibt es viele interessante Ergebnisse zu orientierten Matroiden und ihren Mutationen im Rang 4, siehe [6, 11, Bokowski, Richter-Gebert]. Diese enthalten auch Verfahren zur Konstruktion orientierter Matroide mit wenigen Mutationen. So hat zum Beispiel Richter-Gebert gezeigt, dass es zu jedem  $n$  im Rang 4 ein orientiertes Matroids mit  $n$  Elementen und  $n - 1$  Mutationen gibt. Es ist jedoch noch nicht bekannt, ob Las Vergnas' Vermutung allgemein auch nur im Rang 4 gültig ist.

Ziel dieser Arbeit ist es, etwas über Mutationen von orientierten Matroiden in höheren Rängen  $\geq 5$  auszusagen. So werden zum Beispiel Eigenschaften orientierter Matroide untersucht, die auf die Existenz oder Nicht-Existenz von Mutationen deuten. Außerdem wird überprüft, inwiefern sich die bisherigen Ergebnisse auf den allgemeinen Fall, also mit Rang  $\geq 5$ , verallgemeinern lassen.

Um diese Untersuchungen zu unterstützen, sind Java-Klassen zur Generierung und Manipulation orientierter Matroide entstanden. Das Programm ist unter [www.inf.fu-berlin.de/~renkl](http://www.inf.fu-berlin.de/~renkl) erhältlich.

## 2

# Motivation und Grundlagen

## 2.1 Matroide und orientierte Matroide

Wir betrachten die kombinatorischen Eigenschaften einer Punktkonfiguration in einem beliebigen Vektorraum. Diese können in einem (unorientierten) Matroid kodiert werden. Die Terminologie der Matroid-Theorie spiegelt diese Übereinstimmung wider: So kann man genau die linear bzw. affin unabhängigen Teilmengen der Punktmenge auf die unabhängigen Mengen eines Matroids abbilden. Die maximal linear unabhängigen Mengen entsprechen dann auch den Basen des Matroids, die durch folgende Axiome charakterisiert werden, siehe zum Beispiel [10, Oxley]:

**Definition 1** Sei  $\mathfrak{B}$  eine Menge von Teilmengen der Grundmenge  $E$ .  $\mathfrak{B}$  ist die Menge der Basen eines Matroids auf der Grundmenge  $E$ , g.d.w.

(B1)  $\mathfrak{B}$  ist nicht leer.

(B2) Sind  $B_1, B_2 \in \mathfrak{B}$ , und  $x \in B_1 \setminus B_2$ , so gibt es ein Element  $y \in B_2 \setminus B_1$ , so dass  $(B_1 \setminus x) \cup y \in \mathfrak{B}$ .

Bei dieser Abstraktion gehen natürlich gewisse Eigenschaften der Punktkonfiguration verloren, wie folgendes Beispiel zeigt:



Konfiguration (A)

Konfiguration (B)

Die Abbildung zeigt zwei Punktkonfigurationen mit Punkten in allgemeiner Lage. Ihnen liegt das gleiche Matroid zugrunde. In diesem Fall ist jede  $r$ -elementige Teilmenge der Grundmenge  $E = \{1, \dots, n\}$  eine Basis. Zwischen den beiden gezeigten Punktkonfigurationen gibt es demnach bezüglich der Zusammensetzung affin unabhängiger oder affin abhängiger Teilmengen keinen Unterschied, obwohl die eine Menge konvex ist und die andere nicht.

Nun kann man an den Mengen von jeweils drei Punkten in der Ebene folgende Orientierung ablesen: Liegen die Punkte in der angegebenen Reihenfolge im Uhrzeigersinn, so erhalten sie die Orientierung  $-1$ , andernfalls  $+1$ . Die Orientierung  $0$  bedeutet, dass die drei Punkte auf einer Geraden liegen. Diesen Fall werden wir im folgenden meist ausschließen, so dass wir nur Konfigurationen von Punkten in allgemeiner Lage berücksichtigen. Diese führen zu *uniformen* orientierten Matroiden.

Die beiden gezeigten Punktkonfigurationen unterscheiden sich also zum Beispiel durch die Orientierung der Punkte  $1, 3, 4$ . Im ersten Bild liegen sie entgegen dem Uhrzeigersinn, das heißt ihre Orientierung ist  $+1$ , im zweiten mit dem Uhrzeigersinn, damit ist die Orientierung  $-1$ . Das Verschieben des Punktes  $3$  über die Gerade  $1\ 4$  bedeutet also genau einen Vorzeichenwechsel für die Menge  $1\ 3\ 4$ .

Weiterhin ist die Reihenfolge, in der die Punkte einer Menge betrachtet werden, entscheidend, denn offenbar hat das Tupel  $(1, 3, 4)$  eine entgegengesetzte Orientierung zum Tupel  $(1, 4, 3)$ .

Die orientierten Geraden, die von je zwei Punkten aufgespannt werden, liefern die gleiche Information wie die orientierten Punkt-Tripel, wenn man

für jede Gerade und jeden Punkt festhält, ob der Punkt auf der Geraden, auf der positiven oder auf der negativen Seite der Geraden liegt.



Orientierte Geraden

Mit dieser zusätzlichen Information lassen sich nun die beiden Punkt-konfigurationen unterscheiden. Die Zuordnung von Vorzeichen zu Punkt-Tripeln entspricht genau dem Übergang vom gewöhnlichen zum orientierten Matroid.

Viele Begriffe und Aussagen lassen sich dabei von gewöhnlichen Matroiden auf orientierte Matroide übertragen. Jedes orientierte Matroid hat ein zugrundeliegendes Matroid, von dem es gewisse Eigenschaften übernimmt. Plausiblerweise sind das alle Eigenschaften, die nicht von der Orientierung abhängen. So ist zum Beispiel der Rang eines orientierten Matroids definiert als der Rang (also die Mächtigkeit einer Basis) des zugrundeliegenden Matroids. Ebenso wie Matroide können orientierte Matroide durch eine Reihe äquivalenter Axiomensysteme charakterisiert werden. Damit sind auch verschiedene Darstellungen eines orientierten Matroids verbunden.

In unserem Beispiel können wir das auf der Punkt-konfiguration beruhende orientierte Matroid beschreiben, indem wir die Orientierung für jedes mögliche Tripel von Punkten notieren. Dies führt zur *Chirotop*-Darstellung eines orientierten Matroids, siehe Abschnitt 3.1.

Eine andere Möglichkeit ist es, für jede orientierte Gerade einen Vorzeichenvektor  $(s_1, \dots, s_n)$  anzugeben, wobei  $s_i = +1$ , falls Punkt  $i$  auf der positiven Seite der Geraden liegt,  $s_i = -1$ , falls Punkt  $i$  auf der negativen Seite liegt und  $s_i = 0$ , falls  $i$  einer der Punkte ist, die die Gerade aufspannen. Dies führt zur Darstellung des orientierten Matroids durch Angabe aller *Cokreise*, die in Abschnitt 3.2 beschrieben wird. Zum Beispiel könnte man in Konfigu-

ration (B) der Geraden durch 1 und 3 die beiden Vektoren  $(0, +, 0, -)$  und  $(0, -, 0, +)$  zuordnen.

## 2.2 Projektive Geometrie

Eine weitere wichtige Darstellung orientierter Matroide sind Arrangements von *Pseudo-Hyperebenen* im projektiven Raum. Auf dieses Modell wird später genauer eingegangen. Vorab sollen nur kurz die notwendigen Grundlagen der projektiven Geometrie erläutert werden.

Der projektive Raum  $P^d$  kann als die Menge aller Ursprungsgeraden im  $\mathbb{R}^{d+1}$  aufgefasst werden.

Ist  $v = (v_0, v_1, \dots, v_d) \in \mathbb{R}^{d+1} \neq 0$ , so definiert  $v$  eine Gerade  $\mathbb{R}v$  durch den Ursprung der  $\mathbb{R}^{d+1}$  und ist damit ein projektiver Punkt.  $[v_0, v_1, \dots, v_d]$  werden als homogene Koordinaten des projektiven Punktes  $v$  bezeichnet. Zwischen dem affinen Raum  $\mathbb{R}^d$  und dem projektiven Raum  $P^d$  kann man folgende Abbildungen definieren:

$$i : \mathbb{R}^d \rightarrow P^d, (x_1, \dots, x_d) \mapsto [1, x_1, \dots, x_d]$$

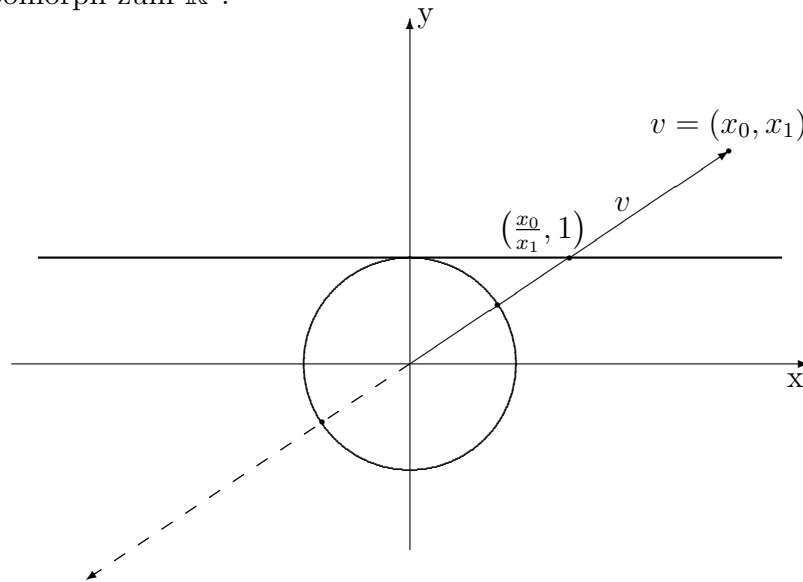
Dies entspricht einer Einbettung des  $\mathbb{R}^d$  in den  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Jedem Punkt des  $\mathbb{R}^d$  kann man so einen Punkt und damit eine Ursprungsgerade im  $\mathbb{R}^{d+1}$  zuordnen. Andersherum kann man einem Vektor  $x = (x_0, \dots, x_d)$  des  $\mathbb{R}^{d+1}$  den Schnittpunkt der Geraden  $\mathbb{R}x$  mit dem eingebetteten  $\mathbb{R}^d$  zuordnen (bis auf die erste Koordinate 1).

$$i : P^d \rightarrow \mathbb{R}^d, [x_0, x_1, \dots, x_d] \mapsto \left( \frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}, \dots, \frac{x_d}{x_0} \right)$$

Damit erhält man die sogenannten affinen Koordinaten eines projektiven Punktes. Dabei ist zu beachten, dass Punkte mit  $x_0 = 0$  keine bzw. unendlich große affine Koordinaten besitzen. Man spricht daher von Fernpunkten.

Punkte des projektiven Raumes  $P^d$  sind also Geraden im  $\mathbb{R}^{d+1}$ . Eine solche Gerade schneidet die Einheitssphäre  $S^d$  in zwei Punkten. Legt man

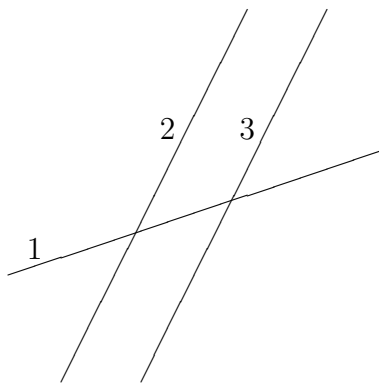
einen Punkt auf der Einheitssphäre fest, so hat man damit genau eine Gerade identifiziert. Zwei gegenüberliegende Punkte definieren dabei stets dieselbe Gerade. Deshalb reicht es, zum Beispiel die obere Hemisphäre zu betrachten, da jede Gerade einen Schnittpunkt auf oberen Hälfte hat. Die Hemisphäre ist homöomorph zum  $\mathbb{R}^d$ .



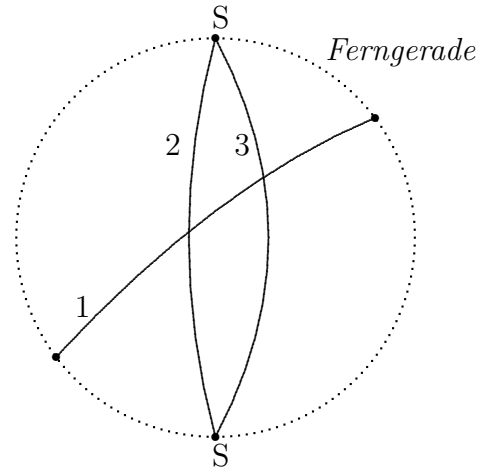
$\mathbb{R}$  eingebettet in  $\mathbb{R}^2$

Die Geraden, deren beide Schnittpunkte genau auf dem Äquator, also dem Rand der Hemisphäre liegen, spielen dabei eine Sonderrolle. Um auch sie mit einem Punkt auf der Hemisphäre identifizieren zu können, muss der Äquator dazu genommen werden. Dabei werden gegenüberliegende Punkte auf dem Äquator identifiziert, da sie zur gleichen Geraden gehören. Damit ist zum Beispiel eine Kurve, die zwei gegenüberliegende Punkte des Äquators enthält, geschlossen. Der Äquator entspricht genau der Fern-Hyperebene.

Man kann den projektiven Raum  $P^d$  auch als euklidischen Raum  $\mathbb{R}^d$  mit dazugenommener Fern-Hyperebene betrachten. Eine Motivation für projektive Geometrie ist der Wunsch, parallele Geraden bzw. Ebenen genau wie andere behandeln zu können. In der projektiven Ebene schneiden sich je zwei Geraden. Werden Parallelen aus der affinen Ebene auf die projektive fortgesetzt, so schneiden sie sich auf der Ferngeraden.



Geraden im  $\mathbb{R}^2$



Geraden in der Projektiven Ebene

Die Abbildung zeigt, wie durch Hinzunahme der Ferngeraden den parallelen Geraden 2, 3 ein Schnittpunkt  $S$  zugeordnet wird.

# 3

## Orientierte Matroide

### Definitionen und Darstellungen

In diesem und im nächsten Abschnitt werden verschiedene Interpretationen und Definitionen von orientierten Matroiden vorgestellt. Die Äquivalenz der Definitionen wird hier nicht gezeigt, der Leser sei dafür auf [1, Björner et al.] verwiesen.

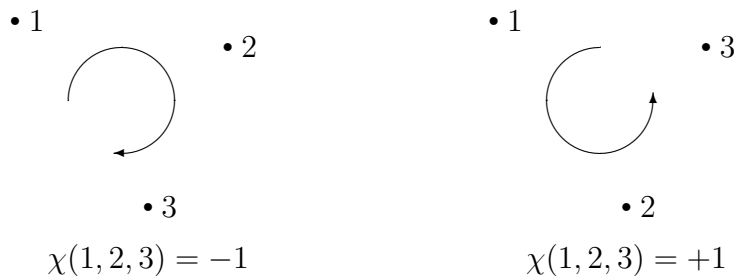
#### 3.1 Chirotope

Wir betrachten wieder als Beispiel die Punktconfiguration in einem Vektorraum mit Punktmenge  $E$ . Einem  $r$ -Tupel  $(x_1 \dots x_r)$  mit  $x_1 \dots x_r \in E$  ordnen wir folgende Orientierung zu:

$$\chi(x_1, \dots, x_r) = \text{sign}(\det(x_1, \dots, x_r))$$

Sind die Vektoren  $x_1 \dots x_r$  linear, bzw. affin unabhängig, so ist  $\{x_1 \dots x_r\}$  eine Basis und  $\chi(x_1 \dots x_r) \in \{-1, 1\}$ . Andernfalls ist  $\chi(x_1 \dots x_r) = 0$ .

Damit ist ein orientiertes Matroid  $M$  vollständig bestimmt. Umgekehrt zu einem gegebenen orientierten Matroid eine Punktconfiguration zu finden, ist ein schwierigeres Problem. In manchen Fällen gibt es auch keine, siehe Abschnitt 3.4.1.



### Orientierte Punkt-Tripel

$\chi$  heißt *Chirotop* von  $M$ . Nimmt  $\chi$  nie den Wert 0 an, so heißt  $M$  *uniform*. Für eine Punktconfiguration ist das genau dann der Fall, wenn die Punkte sich in allgemeiner Lage befinden. Im Folgenden werden wir uns meist auf diesen Fall beschränken.

Bei der Beschreibung aller gültigen Chirotope durch Axiome wird von den konkreten Eigenschaften der Punktconfigurationen abstrahiert, so dass Chirotope auch auf andere Modelle anwendbar sind. Dadurch gehen natürlich gewisse Informationen über Punktconfigurationen verloren. Als Konsequenz ist ein Chirotop ein allgemeineres Konzept als nur die Beschreibung der kombinatorischen Eigenschaften einer Punktconfiguration.

**Definition 2** Eine Funktion  $\chi : E^r \rightarrow \{-1, 0, +1\}$  ist genau dann das Chirotop eines orientierten Matroids, falls

(CHI1)  $\chi$  ist alternierend und die Menge der  $r$ -elementigen Teilmengen  $\{x_1, \dots, x_r\} \subset E$  mit  $\chi(x_1, \dots, x_r) \neq 0$  ist die Menge der Basen eines Matroids mit Rang  $r$  auf der Grundmenge  $E$ .

(CHI2) Für alle  $x_1, \dots, x_r$  und  $y_1, \dots, y_r \in E$  gilt:

$$\text{Ist } \chi(y_1, x_2, \dots, x_r) * \chi(x_1, y_2, x_3, \dots, x_r) \geq 0$$

$$\text{und } \chi(y_2, x_2, \dots, x_r) * \chi(y_1, x_1, x_3, \dots, x_r) \geq 0$$

$$\text{dann ist auch } \chi(x_1, x_2, \dots, x_r) * \chi(y_1, y_2, x_3, \dots, x_r) \geq 0.$$

(CHI2) ist eine Abstraktion der Vorzeichen-Struktur von Determinanten. Die aus einer Punktconfiguration abgeleiteten Determinanten-Vorzeichen erfüllen die 3-Term-Grassmann-Plücker-Relation, und die Eigenschaft (CHI2)

besagt gerade, dass die Chirotopfunktion keinen Widerspruch dazu enthalten darf.

Indem man die Eigenschaft ausnutzt, dass  $\chi$  alternierend ist, kann man die Definition der Funktion  $\chi$  auf die Menge  $\Lambda(E, r)$  beschränken, wobei  $\Lambda(E, r)$  die Menge aller geordneten  $r$ -Tupel mit Elementen aus  $E$  bezeichnet.

Es gilt

$$\chi(\sigma(x_1), \dots, \sigma(x_r)) = \text{sign}(\sigma) * \chi(x_1, \dots, x_r) \text{ für } (x_1, \dots, x_r) \in \Lambda(E, r).$$

So sind orientierte Matroide über die Chirotopfunktion sehr kompakt zu speichern, es reicht eine Vorzeichenkette zusammen mit dem Rang und der Anzahl der Elemente von  $E$ , zum Beispiel

$$3 \ 6 \ +-+++++---+---$$

Das bedeutet dann soviel wie  $\chi(1, 2, 3) = +1, \chi(1, 2, 4) = -1$ , u.s.w.

Ob eine solche Vorzeichenkette ein gültiges Chirotop darstellt, kann man anhand der Drei-Term-Grassmann-Plücker-Relationen (CHI2) überprüfen.

### 3.2 Kreise und Cokreise

Eine weitere wichtige Darstellung orientierter Matroide ist die Angabe aller orientierten Kreise oder Cokreise. Die Kreise entsprechen den minimal linear bzw. affin abhängigen Mengen im Fall einer Punktconfiguration. Im unifornen Fall sind das genau alle  $(r+1)$ -elementigen Teilmengen der Grundmenge. Die Cokreise sind das duale Konzept dazu und entsprechen den Hyperebenen, die von jeweils  $r - 1$  Punkten aufgespannt werden.

Wir betrachten zunächst die Menge der Cokreise des orientierten Matroids  $M$ , die man aus dem Chirotop folgendermaßen ermitteln kann:

$$O^*(\chi) = \{(\chi(\lambda, 1), \dots, \chi(\lambda, n)), \lambda \in E^{r-1}\}$$

Betrachtet man die Hyperebene  $H_\lambda$ , die von den Vektoren  $\lambda_1, \dots, \lambda_{r-1}$  aufge-

spannt wird, so kann man die relative Lage eines Punktes  $i$  zu  $H_\lambda$  direkt aus dem zugehörigen Cokreis ablesen: Der  $i$ -te Eintrag im Cokreis zu  $H_\lambda$  ist 0, falls Punkt  $i$  auf der Hyperebene  $H_\lambda$  liegt, 1, falls  $i$  auf der positiven Seite von  $H_\lambda$  und  $-1$  falls  $i$  auf der negativen Seite von  $H_\lambda$  liegt. Zu jeder Hyperebene gehören zwei Cokreise, die sich nur durch die Orientierung unterscheiden. Auch die Kreise bzw. Cokreise eines orientierten Matroids lassen sich durch Axiome beschreiben:

**Definition 3** Die Menge  $C \subset \{-1, 0, 1\}^n$  ist die Menge der Kreise eines orientierten Matroids  $M$ , g.d.w.

$$(C0) \ 0 \notin C$$

$$(C1) \ X \in C \rightarrow -X \in C$$

$$(C2) \ X, Y \in C, X \subset Y \rightarrow X = Y \text{ oder } X = -Y \text{ (Keine echte Teilmenge eines Kreises ist wieder ein Kreis.)}$$

$$(C3) \ X, Y \in C, X \neq -Y, e \in X^+ \cap Y^-. \text{ Dann gibt es einen Kreis } Z \in C, \text{ so dass } Z^+ \subset (X^+ \cup Y^+) \setminus e \text{ und } Z^- \subset (X^- \cup Y^-) \setminus e.$$

Die Cokreise eines orientierten Matroids erfüllen genau die gleichen Axiome, da eine Menge  $C$  genau dann Cokreismenge eines orientierten Matroids  $M$  ist, wenn sie Kreismenge des zu  $M$  dualen orientierten Matroids  $M^*$  ist, siehe Abschnitt 3.4.2.

Bildet ein Element  $e \in E$  allein einen Kreis, das heißt  $\{e\} \in C(M)$ , so nennt man  $e$  eine Schleife. Zwei Elemente  $e, f \in E$  mit  $\{e, f\} \in C(M)$  heißen parallel.

Enthält  $M$  weder Schleifen noch parallele Elemente, so ist  $M$  ein einfaches orientiertes Matroid. Zusätzlich zur Uniformität ist Einfachheit eine Eigenschaft, die im Folgenden bei allen betrachteten orientierten Matroiden angenommen wird.

Eng verknüpft mit den Kreis-Axiomen ist die Ableitung orientierter Matroide aus gerichteten Graphen. Jeder solche Graph liefert ein orientiertes

Matroid. Die Kantenmengen der gerichteten Kreise des Graphen erfüllen die oben genannten Axiome und sind damit genau die Kreise dieses orientierten Matroids.

(C0) besagt, dass eine leere Kantenmenge kein Kreis ist. Jeder gerichtete Kreis in einem Graphen kann in beide Richtungen durchlaufen werden, womit man sofort (C1) erhält. (C2) besagt, dass keine echte Teilmenge eines Kreises wieder ein Kreis sein kann. (C3) betrifft zwei Kreise  $X, Y$ , die eine Kante  $e$  gemeinsam haben. Entfernt man  $e$ , so erhält man einen großen Kreis  $(X \cup Y) \setminus e$ .

### 3.3 Arrangements von Pseudo-Hyperebenen

#### 3.3.1 Das Theorem von Folkman und Lawrence

Eine häufig verwendete geometrische Interpretation der orientierten Matroide sind Arrangements von *Pseudo-Hyperebenen* im projektiven Raum, bzw. *Pseudo-Sphären*. Diese Interpretation geht auf das Theorem von Folkman und Lawrence zurück, [7, Folkman, Lawrence]:

**Satz 1** *Folkman & Lawrence*

*Es existiert eine eindeutige Entsprechung (bis auf Homöomorphie) zwischen Arrangements von Pseudo-Hyperebenen im projektiven Raum  $P^{d-1}$  und einfachen orientierten Matroiden vom Rang  $d$  (bis auf Spiegelung, das heißt simultanen Wechsel aller Vorzeichen).*

Betrachten wir zunächst Arrangements von "flachen" Hyperebenen im projektiven Raum. Zu jeder Punktconfiguration erhält man wegen Dualität ein solches Arrangement. Dazu verwendet man die Punkt-Vektoren als Normalenvektoren der Hyperebenen.

Mit den Hyperebenen ist allerdings etwas möglich, was mit Punkten nicht geht: Man kann sie etwas verbiegen und dabei ihre sonstigen Eigenschaften erhalten. So kommt man zu Arrangements von Pseudo-Hyperebenen im projektiven Raum. Die Pseudo-Hyperebenen behalten die meisten Eigenschaften

der normalen Ebenen im projektiven Raum bei: Je zwei schneiden sich genau einmal, es gibt keine Selbstüberkreuzungen, usw. Kombinatorisch sind nun aber Arrangements möglich, die mit "flachen" Ebenen nicht darstellbar sind.

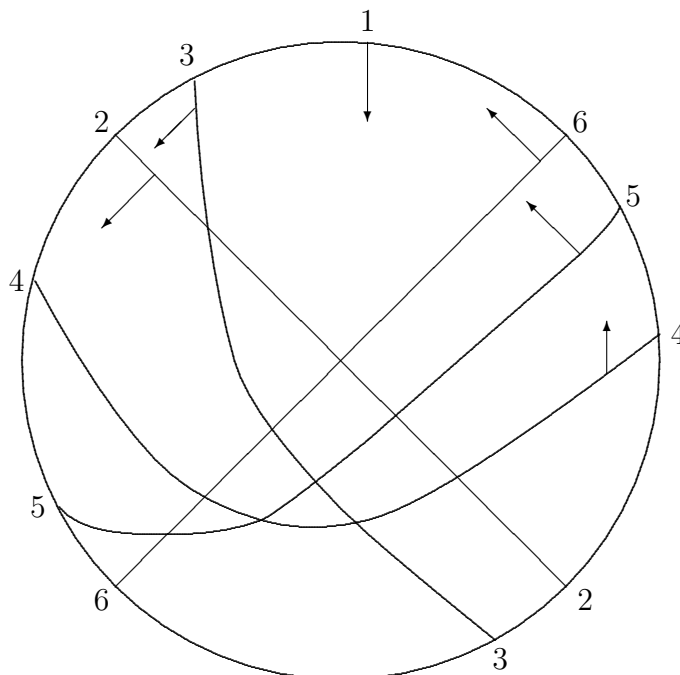
Auch hier bedeutet Uniformität, dass die Pseudo-Hyperebenen sich in allgemeiner Lage befinden. In diesem Fall schneiden sich keine  $r$  Hyperebenen in einem Punkt.

Der Schnitt von  $r - 1$  Hyperebenen, also ein Knoten, entspricht genau einem Cokreis  $X$  des zugehörigen orientierten Matroids. Dabei ist  $X_e = 0$ , falls  $e$  eine der  $r - 1$  Schnitt-Hyperebenen ist,  $X_e = +1$ , falls der Schnittpunkt in positiven Halbraum bezüglich der Hyperebene  $e$  liegt, und  $X_e = -1$  falls der Schnittpunkt im negativen Halbraum bezüglich  $e$  liegt.

Die mit den Cokreisen identifizierbaren Knoten sind die 0-dimensionalen Zellen des Zellkomplexes, in welchen der Raum durch das Arrangement von Hyperebenen aufgeteilt wird. Auch den anderen Zellen kann man auf die beschriebene Art Vorzeichenvektoren zuordnen. Damit erhält man die Menge der Covektoren des orientierten Matroids, als Obermenge der Cokreise. Diese kann ebenfalls durch ein Axiomensystem beschrieben werden, siehe dazu [1, Björner et al.].

Sowohl die Menge der Cokreise als auch die Menge der Covektoren charakterisieren das zugehörige orientierte Matroid eindeutig. Die Cokreise sind genau die Covektoren mit minimalem Träger und lassen sich daher leicht aus der Menge der Covektoren bestimmen. Durch fortgesetzte Komposition der Cokreise kann man wiederum alle Covektoren erzeugen.

Äquivalent zu den Arrangements von Pseudo-Hyperebenen kann man auch Arrangements von Pseudokreisen auf der Einheitssphäre  $S^{r-1}$  betrachten. Diese erhält man, wenn man den Schnitt der Pseudo-Hyperebenen mit  $S^{r-1}$  betrachtet. Dabei geht keine Information verloren. Die Einheitssphäre wird durch die orientierten Pseudokreise in Zellen zerlegt, die auch hier den Covektoren und Cokreisen entsprechen.



Pseudo-Hyperebenen im Rang 3

Chirotop:

3 6 ++++++-----+

Hyperlinien-Sequenz:

1	2	3	6	5	4
2	1	-3	-6	-5	-4
3	1	2	-6	-5	-4
4	1	2	3	5	6
5	1	2	3	-4	6
6	1	2	3	-4	-5

### 3.3.2 Hyperlinien-Sequenzen

Eine übersichtliche Darstellung eines Arrangements von Pseudo-Hyperebenen bieten die von Bokowski eingeführten Hyperlinien-Sequenzen, [5, Bokowski]. Diese ist in der beschriebenen Form nur für uniforme orientierte Matroide möglich.

In der Hyperlinien-Sequenz werden alle *Rang 2-Kontraktionen* des orientierten Matroids angegeben (siehe Abschnitt 3.5). Geometrisch entspricht

eine sogenannte Hyperlinie einer Pseudogeraden, die als Schnitt von jeweils  $r - 2$  Pseudohyperebenen entsteht. Jede dieser Pseudogeraden schneidet die restlichen  $n - (r - 2)$  Hyperebenen in bestimmter Reihenfolge und Richtung. Die Reihenfolge ist zyklisch, da jede Hyperlinie eine geschlossene Kurve in der projektiven Ebene darstellt. Es spielt also keine Rolle, bei welchem Schnitt man beginnt.

Ein Beispiel für eine Hyperlinie im Rang 5:

$$3 \ 4 \ 7 \ | \ +1 \ -5 \ -2 \ +6 \ +8$$

Vor dem Strich werden die die Linie definierenden Hyperebenen angegeben. In diesem Beispiel ist die betrachtete Hyperlinie der Schnitt der Hyperebenen 3, 4 und 7. Sie schneidet die restlichen Hyperebenen in der angegebenen Reihenfolge, wobei 1, 6 und 8 in Richtung ihrer Orientierung durchlaufen werden, 5 und 2 entgegen ihrer Orientierung.

Da die Reihenfolge der Schnitte zyklisch ist, stellt die obige Notation ein Abkürzung für

$$3 \ 4 \ 7 \ | \ +1 \ -5 \ -2 \ +6 \ +8 \ -1 \ +5 \ +2 \ -6 \ -8$$

dar.

Insbesondere muss man beachten, dass die Schnittpunkte des ersten und letzten Eintrags stets benachbart sind.

Aus der Hyperlinien-Sequenz lässt sich das Chirotop schnell bestimmen: Um  $\chi(\lambda)$  für  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r) \in \Lambda(E, r)$  zu bestimmen, überprüft man zum Beispiel die Reihenfolge und die Vorzeichen der Einträge  $\lambda_{r-1}$  und  $\lambda_r$  in der Hyperlinie, die durch  $\lambda_1 \dots \lambda_{r-2}$  definiert wird.

Es spielt dabei keine Rolle, welche Hyperlinie man betrachtet. Ist die Sequenz korrekt, das heißt, beschreibt sie ein legales Arrangement von Pseudo-Hyperebenen, so erhält man das gleiche Vorzeichen für jede Wahl von  $r-2$  Einträgen, die jeweils eine Hyperlinie definieren. Das ist auch ein hinreichendes Kriterium zur Überprüfung, ob eine gegebene Sequenz ein legales Arrangement repräsentiert.

Bei der Bestimmung eines Chirotop-Wertes muss man nur beachten, dass das Chirotop eine alternierende Funktion ist, dass also stets das Vorzeichen der Permutation und die der Einträge in das Ergebnis eingehen. Betrachten wir zum Beispiel die Hyperlinie einer Rang 4-Sequenz:

$$2 \ 5 \ | \ +1 \ -6 \ +3 \ +4$$

Sie bestimmt zum Beispiel folgende Chirotop-Werte:

$$\chi(2, 5, 1, -6) = 1 \rightarrow \chi(1, 2, 5, 6) = -1, \quad \chi(2, 5, 1, 3) = 1 \rightarrow \chi(1, 2, 3, 5) = -1$$

usw.

Um umgekehrt die Hyperlinien-Sequenz aus dem Chirotop zu bestimmen, sortiert man die Einträge jeder Hyperlinie nach den Chirotop-Werten. Man bestimmt zuerst willkürlich eine Richtung der Hyperlinie. Ebenfalls willkürlich ist der Anfangspunkt zu wählen, da es keinen geometrisch Unterschied zwischen  $2 \ 5 \ | \ +1 \ -6 \ +3 \ +4$  und  $2 \ 5 \ | \ +3 \ +4 \ -1 \ +6$  gibt.

Zumeist hält man sich an die Konvention, dass die Hyperebene mit kleinster Nummer und mit positiver Orientierung zuerst in der Hyperlinien-Schnittliste steht. Damit hat man auch festgelegt, ob die restlichen Hyperebenen mit oder entgegen ihrer jeweiligen Orientierung geschnitten werden, also das Vorzeichen jeder Hyperebene innerhalb der Zeile. Nun kann man die Reihenfolge bestimmen:

$$\chi(\lambda_1 \dots \lambda_r - 2, x, y) * \text{sign}(x) * \text{sign}(y) = 1$$

$$\iff x \text{ kommt vor } y \text{ in der Hyperlinie } \lambda_1 \dots \lambda_{r-2}$$

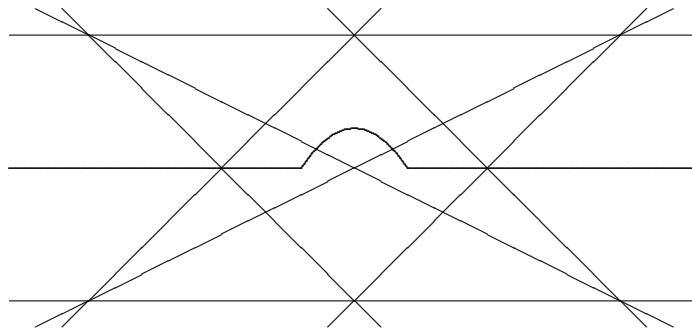
Mit dieser Umwandlung kann man auch feststellen, ob eine gegebene Vorzeichenkette ein Chirotop darstellt, sich also in eine legale Hyperlinien-Sequenz umwandeln lässt. Ist das nicht der Fall, so ergeben sich während der Sortierung der Schnitt-Folgen Widersprüche.

## 3.4 Eigenschaften orientierter Matroide

### 3.4.1 Realisierbarkeit

Wie wir gesehen haben, liefert jede Punktconfiguration in einem Vektorraum über einem geordneten Körper ein orientiertes Matroid. Im Gegensatz dazu lässt sich nicht jedes orientierte Matroid auf eine solche Punktconfiguration zurückführen. Die orientierten Matroide, bei denen das geht, heißen realisierbar.

Das Modell der Pseudo-Hyperebenen erlaubt folgende Interpretation: Ein orientiertes Matroid ist genau dann realisierbar, wenn das zugehörige Arrangement von Pseudo-Hyperebenen kombinatorisch äquivalent zu einem Arrangement von "flachen" Hyperebenen ist, das heißt, man kann die Pseudo-Hyperebenen gerade biegen, ohne die Zellstruktur des Arrangements zu verändern. Aus diesem "flachen" Arrangement von Hyperebenen kann man dann die Punktconfiguration direkt ableiten.



Nicht-realisierbares orientiertes Matroid (nach Pappus)

Das abgebildete (nicht uniforme) orientierte Matroid hat 9 Elemente. Dabei ist es nicht möglich, die mittlere Pseudogerade zu begradigen, ohne dass sich dann im mittleren Punkt drei Geraden schneiden. Diese Beobachtung geht zurück auf den Satz von Pappus: Liegen die Ecken eines Sechsecks abwechselnd auf zwei Geraden, so liegen die drei Schnittpunkte der Verbindungen ebenfalls auf einer Geraden.

Dieses minimale nicht-realisierte orientierte Matroid hat Rang 3 und 9 Elemente. Durch lokale Perturbationen kann man hier außerdem die Uniformität herstellen, ohne dass das orientierte Matroid realisierbar wird.

Für jedes  $n \geq 9$  gibt es nicht-realisierte orientierte Matroide im Rang 3. Weiterhin gibt es immer nicht-realisierte orientierte Matroide für  $r \geq 4$  und  $n \geq r + 4$ . Ein Beweis dazu findet sich zum Beispiel in [1, Björner et al., Kapitel 8].

Die Überprüfung, ob ein beliebiges gegebenes orientiertes Matroid realisierbar ist, ist NP-hart [1, Björner et al., Kapitel 8.7].

### 3.4.2 Dualität

Der Begriff der Dualität ist aus der Theorie der (unorientierten) Matroide bekannt. Er ist eng verknüpft mit dem Begriff der Orthogonalität von Vorzeichenvektoren, welcher hier zuerst definiert wird:

**Definition 4** Seien  $X, Y$  Vorzeichenvektoren, also  $X, Y \in \{-1, 0, 1\}^n$ .  $X$  und  $Y$  heißen orthogonal, in Zeichen  $X \perp Y$ , genau dann wenn

1. Die Träger  $\underline{X}$  und  $\underline{Y}$  sind disjunkt,  $\underline{X} \cap \underline{Y} = \emptyset$  oder
2. Die Beschränkung von  $X$  und  $Y$  auf ihren Schnitt unterscheidet sich, das heißt, es gibt Elemente  $e, f \in \underline{X} \cap \underline{Y}$  mit  $X_e Y_e = -X_f Y_f$ .

Bei der Übertragung des Dualitäts-Begriffs auf orientierte Matroide werden den Kreisen Orientierungen zugeordnet.

**Definition 5** Eine Signatur der Kreise eines Matroids  $M$  ordnet jedem Kreis  $C$  von  $M$  zwei komplementäre gerichtete Kreise  $X$  und  $-X$  zu, deren Träger  $X$  ist.

Damit lässt sich der Begriff der Dualität für orientierte Matroide formulieren:

**Definition 6**  $M = (E, C)$  sei ein orientiertes Matroid mit Rang  $r$  auf der Grundmenge  $E = \{1, \dots, n\}$ . Dann existiert eine eindeutige Signatur  $C^*$  der

Cokreise des zugrundeliegenden Matroids, so dass  $X \perp Y$  für alle  $X \in C, Y \in C^*$ . Damit ist  $M^* = (E, C^*)$  ein orientiertes Matroid mit Rang  $n-r$  und Kreisen  $C^*$ . Es gilt:  $M^{**} = M$ .

Das zu  $M^*$  gehörige Chirotop  $\chi^*$  kann wie folgt bestimmt werden:

$$\chi^* : E^{n-r} \rightarrow \{-1, 0, 1\}$$

ist definiert durch

$$\chi^*(x_1, \dots, x_{n-r}) = \chi(x_1, \dots, x_r) * \text{sign}(x_1, \dots, x_{n-r}, x_1, \dots, x_r)$$

Dabei ist  $\{x_1, \dots, x_r\} = E \setminus \{x_1, \dots, x_{n-r}\}$ . Der letzte Term bezeichnet das Vorzeichen der Permutation der Elemente  $1 \dots n$ . Der angegebene Wert ist somit unabhängig von der Sortierung des Tupels  $(x_1, \dots, x_r)$ .

### 3.5 Operationen auf orientierten Matroiden

**Definition 7** Ist  $C^*$  die Menge der Cokreise eines orientierten Matroids  $M$ , so ist  $\{c \in C^*, a \notin c\}$  wiederum Cokreis-Menge eines orientierten Matroids, der Deletion  $M \setminus a$ .

Geometrisch bedeutet die Deletion einfach das Entfernen eines Punktes oder einer Hyperebene aus der Konfiguration. Die entgegengesetzte Operation besteht demzufolge aus dem Einfügen eines Elements und heißt Extension oder Erweiterung.

**Definition 8** Ist  $C^*$  die Menge der Cokreise eines orientierten Matroids  $M$ , so ist auch  $\{c \setminus a, c \in C^*, a \in c\}$  Cokreis-Menge eines orientierten Matroids, der Kontraktion  $M/a$ .

Geometrisch entspricht die Kontraktion der Projektion des Arrangements auf die Hyperebene  $a$ , der Rang sinkt dabei um 1. Die Umkehroperation heißt Lifting.

Sind  $M, N$  orientierte Matroide und  $N$  eine Erweiterung oder ein Lifting von  $M$ , so heißt  $M$  *Minor* von  $N$ .

Bezüglich des dualen orientierten Matroids gibt es folgende Entsprechung:

$$M \setminus a = (M^* / a)^*$$

Eine Deletion bedeutet also nichts anderes als eine Kontraktion im Dualen, und eine ein-elementige Erweiterung entspricht einem Lifting des dualen orientierten Matroids.

### 3.6 Reorientierungsklassen

Anschaulich ist klar, dass man an einem Arrangement orientierter Pseudo-Hyperbenen nichts ändert, wenn man die Elemente unnummeriert. Auch die Reorientierung einzelner Elemente hat zwar zu Folge, dass sich das orientierte Matroid ändert, die kombinatorische Struktur bleibt jedoch erhalten. Aus diesem Grund definiert man folgende Äquivalenzrelation auf der Menge aller orientierten Matroide:

**Definition 9** *Zwei orientierte Matroide  $M, M'$  sind in der gleichen Reorientierungsklasse, wenn  $M$  aus  $M'$  durch Umbenennung oder Reorientierung von einzelnen Elementen, oder durch Kippen aller Vorzeichen hervorgegangen ist.*

Da eine Reorientierungsklasse einen kombinatorischen Typ darstellt, kann man viele Untersuchungen auf einen Repräsentanten der Klasse beschränken, wenn die untersuchten Eigenschaften sich innerhalb der Klasse nicht unterscheiden. So haben zum Beispiel alle orientierten Matroide einer Reorientierungsklasse die gleiche Anzahl Mutationen.

In dieser Arbeit geht es daher um den kombinatorischen Typ, also die Reorientierungsklasse der untersuchten orientierten Matroide, und nicht um ihre ganz spezielle Vorzeichenstruktur.

# 4

## Mutationen in Orientierten Matroiden

### 4.1 Definition

Wie bereits angedeutet wurde, gibt es viele verschiedene Charakterisierungen einer Mutation. Die für uns wichtigste ist die lokale Veränderung des Chirotops:

**Definition 10** Sei  $M = (E, \chi)$  ein uniformes orientiertes Matroid.  $\lambda \in \Lambda(E, r)$  ist eine Mutation von  $M$ , falls  $(E, \chi_{-\lambda})$  ebenfalls ein orientiertes Matroid darstellt, das heißt,  $\chi_{-\lambda}$  ist Chirotop. Dabei ist  $\chi_{-\lambda}$  definiert durch

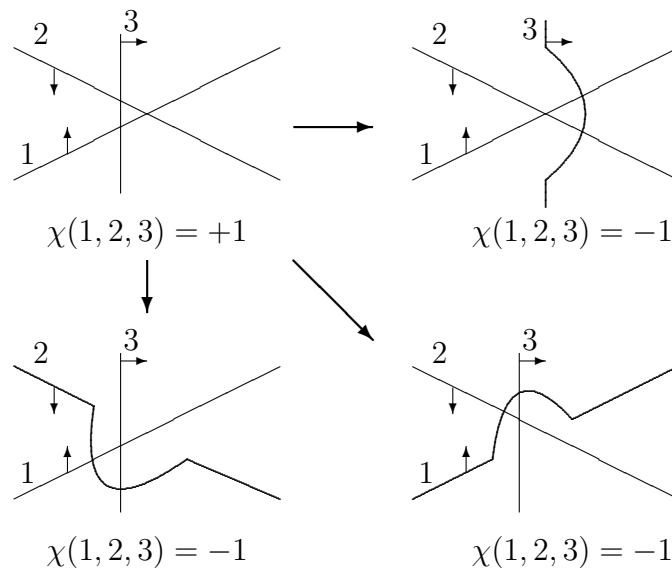
$$\chi_{-\lambda}(t) = \begin{cases} \chi(t) & \text{für } t \neq \lambda \\ -\chi(\lambda) & \text{für } t = \lambda \end{cases}$$

Mit  $Mut(M)$  bezeichnen wir die Menge aller Mutationen von  $M$ , mit  $Mut_k(M)$  die Menge aller Mutationen, die das Element  $k$  enthalten.

Im Modell der Punktconfiguration bedeutet das Umklappen eines Vorzeichens das Verschieben eines Punktes über genau eine von  $r - 1$  anderen Punkten aufgespannte Hyperebene, wie wir schon in Abschnitt 2.1 gesehen haben.

In einer Punktconfiguration sind Mutationen allerdings schwer zu erkennen, und man muss sicher stellen, dass mit der Verschiebung eines Punktes wirklich nur ein Vorzeichen wechselt.

In einem Hyperebenen-Arrangement bedeutet das Wechseln von  $\chi$  zu  $\chi_{-\lambda}$  das Verschieben einer der an der Mutation beteiligten Hyperebenen auf die andere Seite der Mutation. Das ist deshalb möglich, weil die Mutation einem Simplex im Arrangement entspricht; es ändert sich nur genau ein Vorzeichen. Man kann leicht nachprüfen, dass es dabei keine Rolle spielt, welche der beteiligten Hyperebenen man verschiebt, bzw. lokal verbiegt.



Flippen einer Mutation

In der Hyperlinien-Sequenz erkennt man Mutationen daran, dass Elemente, die zu einer Mutation gehören, in den Hyperlinien der anderen Mutationselemente immer benachbart sind, das heißt, ist  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  eine Mutation, so haben die dazugehörigen Hyperlinien folgende Form (bis auf die Reihenfolge der Schnitt-Hyperebenen):

$$\begin{array}{ccccccc}
 \lambda_1 & \lambda_2 & \dots & \lambda_{r-2} & | & \dots & \lambda_{r-1} & \lambda_r & \dots \\
 & & & & & \dots & & & \\
 & & & & & & & & \\
 \lambda_3 & \lambda_4 & \dots & \lambda_r & | & \dots & \lambda_1 & \lambda_2 & \dots
 \end{array}$$

Das Umklappen der Mutation wird hier durch das Vertauschen der beiden Elemente in allen beteiligten Linien realisiert.

Das folgende Theorem fasst die wichtigsten Charakterisierungen von Mutationen zusammen:

**Satz 2** *Sei  $M$  ein uniformes orientiertes Matroid im Rang  $r$ . Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1.  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  ist Mutation
2.  $\lambda$  wird durch keine Grassmann-Plücker-Beziehung festgelegt.
3. Im zugehörigen Pseudo-Hyperebenen-Arrangement sind  $\lambda_1 \dots \lambda_r$  die Flächen eines Simplex.
4. Für jede Zerlegung  $\lambda' \cup \lambda'' = \lambda$  ist  $\lambda'$  eine Mutation in  $M/\lambda''$ .

Für einen Beweis siehe [12, Roudneff, Sturmfels] und [1, Björner et al.].

Charakterisierung (4) liefert eine Möglichkeit, Mutationen an bestimmten Elementen auszuschließen: Ist  $M$  ein orientiertes Matroid,  $a, b$  Elemente der Grundmenge und hat  $M$  eine Mutation  $(a, b, \lambda)$ , so hat  $M/a$  eine Mutation der Form  $(b, \lambda)$  und  $M/b$  eine Mutation der Form  $(a, \lambda)$ . Umgekehrt gilt dann: Ist  $M$  ein orientiertes Matroid, und besitzt  $M/a$  keine Mutation der Form  $(b, \dots)$ , so gibt es auch in  $M$  keine Mutation  $(a, b, \dots)$ .

Ein *reduziertes System*  $R$  eines Chirotops  $\chi$  ist eine minimale Menge von Basen, deren Festlegung bereits das ganze Chirotop bestimmt. Eine Mutation muss offensichtlich in jedem reduzierten System enthalten sein,  $Mut(\chi) \subset R$  für jedes  $R$ .

## 4.2 Mutationen im Dualen

Die Mutationen des zu  $M$  dualen orientierten Matroids  $M^*$  lassen sich direkt anhand der Mutationen von  $M$  ablesen: Es sind genau die Komplemente bezüglich der Grundmenge  $E$ .

**Satz 3** Sei  $M = (E, \chi)$  uniformes orientiertes Matroid mit Rang  $r$ .

$a = (a_1, \dots, a_r)$  ist eine Mutation von  $M$  g.d.w.  $b := E \setminus a$  eine Mutation von  $M^*$  ist. Dabei ist  $E = \{a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_{n-r}\}$ .

Beweis:  $a$  ist genau dann eine Mutation von  $M$ , wenn  $a$  durch keine Grassmann-Plücker-Relation festgelegt wird. Wir betrachten erneut die Bedingung (CHI2):

Für alle  $x_1, \dots, x_r, y_1, y_2 \in E$

$$\text{Ist } \chi(y_1, x_2, \dots, x_r) * \chi(x_1, y_2, x_3, \dots, x_r) \geq 0$$

$$\text{und } \chi(y_2, x_2, \dots, x_r) * \chi(y_1, x_1, x_3, \dots, x_r) \geq 0$$

$$\text{dann ist auch } \chi(x_1, x_2, \dots, x_r) * \chi(y_1, y_2, x_3, \dots, x_r) \geq 0.$$

Wir können unsere Betrachtung auf  $y_1, y_2 \in E \setminus x$  beschränken, ansonsten ist die Bedingung immer erfüllt: Falls  $y_1$  oder  $y_2 \in \{x_3, \dots, x_r\}$ , oder  $y_1 = y_2$  so sind alle drei Terme 0. Ist  $y_1 = x_1$ , so sind der erste und dritte Term gleich, im Fall  $y_2 = x_1$  der zweite und dritte.

Wir ermitteln den Wert des Terms  $\chi^*(x, b_2, \dots, b_{n-r}) * \chi^*(b_1, y, b_3, \dots, b_{n-r})$  für  $x, y \in E \setminus b = a$ . Seien o.B.d.A. die Elemente von  $a$  so nummeriert, dass  $x = a_1$  und  $y = a_2$ .

Dann ist

$$\begin{aligned} \chi^*(x, b_2, \dots, b_{n-r}) * \chi^*(b_1, y, b_3, \dots, b_{n-r}) &= \chi(b_1, a_2, \dots, a_r) * \chi(a_1, b_2, a_3, \dots, a_r) \\ &\quad * \text{sign}(b_1, a_2, \dots, a_r, a_1, b_2, \dots, b_{n-r}) \\ &\quad * \text{sign}(a_1, b_2, a_3, \dots, a_r, b_1, a_2, b_3, \dots, b_{n-r}) \end{aligned}$$

Durch Vertauschen von  $b_1$  und  $a_1$  in der ersten Permutation und von  $b_2$  und  $a_2$  in der zweiten Permutation erhält man in beiden Fällen die Permutation  $(a_1, \dots, a_r, b_1, \dots, b_{n-r})$ .

Da bei beiden Fällen genau  $r - 1$  Elemente zwischen den zu vertauschenden Elementen stehen, ist die Anzahl der dabei durchgeführten Transformationen bei beiden Vertauschungen gleich. Deshalb gilt:

$$\text{sign}(b_1, a_2, \dots, a_r, a_1, b_2, \dots, b_{n-r}) = \text{sign}(a_1, b_2, a_3, \dots, a_r, b_1, a_2, b_3, \dots, b_{n-r}),$$

und es folgt:

$$\chi^*(x, b_2, \dots, b_{n-r}) * \chi^*(b_1, y, b_3, \dots, b_{n-r}) = \chi(b_1, a_2, \dots, a_r) * \chi(a_1, b_2, a_3, \dots, a_r)$$

Für den zweiten Term erhält man analog

$$\begin{aligned} \chi^*(y, b_2, \dots, b_{n-r}) * \chi^*(x, b_1, b_3, \dots, b_{n-r}) &= \chi(a_1, b_1, a_3, \dots, a_r) * \chi(a_2, b_2, a_3, \dots, a_r) \\ &= \chi(b_1, a_1, a_3, \dots, a_r) * \chi(b_2, a_2, a_3, \dots, a_r) \end{aligned}$$

Die beiden ersten Terme der Grassmann-Plücker-Bedingung sind also für jedes  $a$  und  $b = E \setminus a$  identisch. Damit ist  $b$  in  $\chi^*$  genau dann durch eine Grassmann-Plücker-Relation festgelegt, wenn das für  $a$  in  $\chi$  gilt. Dies ist wiederum äquivalent dazu, dass  $a$  und  $b = E \setminus a$  Mutationen in  $M$  bzw.  $M^*$  sind.

Insbesondere haben ein uniformes orientiertes Matroid  $M$  und sein Duales  $M^*$  stets die gleiche Anzahl Mutationen.

### 4.3 Das Theorem von Shannon

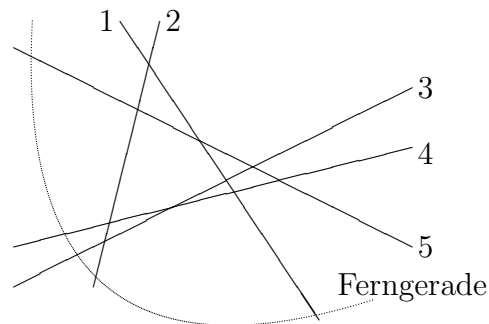
Im realisierbaren Fall gibt das Theorem von Shannon eine untere Schranke für die Anzahl von Mutationen an, siehe [13, 14, Shannon] und [12, Roudneff, Sturmfels]:

**Satz 4** *Ist  $H$  ein nicht-triviales Arrangement von  $n$  Hyperebenen im projektiven Raum  $P^d$  und  $h \in H$ . Dann gibt es mindestens  $d+1$  simpliziale  $d$ -Zellen, die zu  $h$  adjazent sind und  $n-d-1$  simpliziale  $d$ -Zellen, die nicht zu  $h$  adjazent sind.*

*Insbesondere hat also ein solches Arrangement mindestens  $n$  simpliziale Regionen.*

Die Voraussetzung der Nicht-Trivialität bedeutet hier, dass es keinen Punkt gibt, der in allen Hyperebenen bis auf eine enthalten ist, es dürfen sich also keine  $n-1$  Hyperebenen in einem Punkt schneiden.

Beweisskizze: Man betrachtet die zum Arrangement duale Punkt-konfiguration. Die Punkte befinden sich in allgemeiner Lage. Entfernt man einen Punkt  $i$ , so bleiben  $n - 1$  Punkte, von denen je  $d = r - 1$  eine Hyperebene aufspannen. Mindestens  $r$  davon sind die Flächen der volldimensionalen Region, aus welcher der Punkt  $i$  entfernt wurde. Fügt man den Punkt  $i$  wieder ein, so kann man ihn über jede dieser Flächen  $H_\lambda$  verschieben und ändert dabei jedes Mal nur ein Vorzeichen, nämlich das der Menge  $(i, \lambda_1, \dots, \lambda_{r-1})$ , das heißt, dass  $i$  an mindestens  $r$  Mutationen beteiligt ist.



Ein "flaches" Arrangement im Rang 3

Damit bietet die Frage nach der Anzahl der Mutationen auch einen Anhaltspunkt, ob ein gegebenes orientiertes Matroid realisierbar ist. Hat es weniger Mutationen als Elemente, so ist das offensichtlich nicht der Fall.

Shannon konstruiert außerdem eine Klasse von Arrangements mit minimaler Anzahl von simplizialen Zellen, die die sogenannten zyklischen orientierten Matroide repräsentieren. Diese Konstruktion sowie der genaue Beweis zum Theorem sind in [14, Shannon] zu finden.

Shannons Aussagen gelten für alle orientierte Matroide mit Rang  $\leq 3$ , auch wenn diese nicht realisierbar sind. Dies geht auf die Untersuchungen an Arrangements von Pseudogeraden zurück, für die Levi bereits 1926 die genannte untere Schranke zeigte, [8, Levi]. Wegen der Dualität, siehe Abschnitt 4.2, kann man den Satz auch auf orientierte Matroide mit  $n$  Elementen und Rang  $r \geq n - 3$  übertragen.

## 4.4 Das X(8)

In den folgenden Abschnitten werden Gegenbeispiele zu Shannons Theorem untersucht. Ein solches Gegenbeispiel muss mindestens Rang 4 haben und aus  $n > r + 3$  Elementen bestehen, im Rang 4 muss also  $n$  mindestens 8 betragen. Das X(8) ist in diesem Sinne das kleinste denkbare Gegenbeispiel mit 8 Elementen im Rang 4. Es besitzt nur 7 Mutationen. Mit Hilfe des Computers wurde gezeigt, dass die Reorientierungsklasse des X(8) die einzige Klasse mit dieser Eigenschaft ist, siehe [6, Bokowski, Rohlf]

Geometrisch lässt sich das X(8) aus zwei Tetraedern konstruieren, die parallele Seiten und den gleichen Mittelpunkt haben. Die parallelen Ebenen werden an ihren Schnittpunkten mit der Fernebene so verformt, dass ein uniformes orientiertes Matroid mit 7 Mutationen entsteht. Die zuvor parallelen Ebenen werden dadurch zu *inseparablen Paaren*, siehe Abschnitt 5.1.

Das X(8) wurde zur Konstruktion mehrerer Klassen orientierter Matroide mit wenigen Mutationen verwendet. Diese werden im Folgenden noch genauer erläutert.

Ebenfalls durch ein Testen aller Möglichkeiten mit dem Computer wurde gezeigt [6], dass es genau 5 Reorientierungsklassen orientierter Matroide mit 9 Elementen gibt, die Shannons Aussagen widersprechen. Sie alle haben 8 Mutationen und sind Erweiterungen des X(8). Für  $n = 10$  wurden nur noch die Erweiterungen der 5 X(9)-Reorientierungsklassen untersucht. Hiervon gibt es 179, die 9 Mutationen haben. Für  $n = 11$  wurden zwei Reorientierungsklassen mit nur 9 Mutationen gefunden.

Die Hyperlinien-Sequenz und das Chirotop des X(8) sind im Anhang angegeben.

## 4.5 Euklidische orientierte Matroide

Eine weitere Eigenschaft orientierter Matroide, die auf die Existenz von Mutationen schließen lässt, ist die Euklidizität.

**Definition 11** Ein affines orientiertes Matroid ist ein Paar  $(M, g)$ , wobei  $M$  ein orientiertes Matroid und  $g \in E$  ein Element der Grundmenge von  $M$  und keine Schleife ist.

Das Element  $g$  nimmt in der Darstellung von  $M$  die Rolle der Fernebene an. Der affine Raum ist die Menge der Covektoren  $Y$  mit  $Y_g = +1$ .

**Definition 12** Ein Orientiertes Matroid-Programm ist ein Tripel  $(M, g, f)$ , wobei  $(M, g)$  ein affines orientiertes Matroid,  $f \in E$  und  $f$  keine Co-Schleife ist.

Ein solches Programm kodiert die Aufgabe, das Element  $f$  über dem Polyeder  $P(E)$  zu maximieren.

**Definition 13** Ein Orientiertes Matroid-Programm heißt euklidisch, wenn für jeden Cokreis  $Y$  im affinen Raum eine ein-elementige Erweiterung  $M = M \cap p$  gibt, so dass  $p$  parallel zu  $f$  in  $(M, g)$  ist und  $(Y, 0)$  ein Cokreis von  $M$  ist.

Zwei Elemente  $a, b$  in einem affinen orientierten Matroid  $(M, g)$  heißen parallel, falls sie in  $M$  parallel sind, das heißt,  $\{a, b\}$  ist ein Kreis in  $M$ .

Diese Definition überträgt das euklidische Postulat auf orientierte Matroide: Für jede Hyperebene  $H$  und jeden Punkt  $v$  im affinen Raum gibt es eine eindeutige Hyperebene  $H$ , die parallel zu  $H$  ist und  $v$  enthält.

Betrachten wir den Graphen  $G_f$  des Orientierten Matroid-Programms  $(M, g, f)$ . Die Knoten sind genau die Cokreise im affinen Raum, die Kanten die Covektoren der Dimension 2. Die Kanten werden nach folgender Regel orientiert:

$X, Y$  Cokreise in  $A$ ,  $Z$  sei der Cokreis, der durch Weglassen von  $g$  aus  $X, -Y$  entsteht. Ist  $Z_f = +1$ , so ist die Kante  $(X, Y)$  eine ansteigende Kante von  $X$  nach  $Y$ . Ist  $Z_f = -1$ , so ist die Kante absteigend und zeigt von  $Y$  nach  $X$ . Ist  $Z_f = 0$ , so ist die Kante ungerichtet.

Die Maximierung des Elements  $f$  erfolgt dann über die Verfolgung aufsteigender Kanten.

Der folgende wichtige Satz stammt von Edmonds und Mandel:

**Satz 5** *Ein orientiertes Matroid Programm  $(M, g, f)$  ist euklidisch genau dann, wenn  $G_f$  keinen gerichteten Kreis enthält.*

Im nicht-euklidischen Fall ist die Maximierung offensichtlich nicht immer möglich.

Alle bisher bekannten Gegenbeispiele zu Shannons Aussagen sind nicht-euklidisch. Es stellt sich also die Frage, ob das Theorem sich von den realisierbaren auf alle euklidischen orientierten Matroide verallgemeinern lässt.

Zumindest gibt es keine euklidischen orientierten Matroide ohne Mutationen, auch das wurde von Edmonds und Mandel gezeigt, siehe [1, Björner et al.].

# 5

## Mutationen und inseparable Elemente

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit inseparablen  $k$ -Mengen, die so etwas wie mutationsähnliche Unterstrukturen eines orientierten Matroids sind. Man betrachtet die Mutationen der Kontraktionen  $M/\lambda$ ,  $\lambda \subset E$ , also die Projektionen auf geringere Dimension. Ihre Existenz kann auf die Existenz von Mutationen in  $M$  hindeuten, bzw. im anderen Fall kann die Tatsache, dass bestimmte inseparable  $k$ -Mengen nicht existieren, auch bestimmte Mutationen in  $M$  ausschließen. Einen Spezialfall stellen die inseparablen Mengen der Größe 2 dar.

### 5.1 Inseparable Paare

**Definition 14** *Zwei Elemente  $a$  und  $b$  eines orientierten Matroids  $M$  heißen kovariant, wenn  $\chi(\lambda, a) = \chi(\lambda, b)$  für alle  $\lambda \subset E^{r-1}$ .  $a$  und  $b$  heißen kontravariant falls  $\chi(\lambda, a) = -\chi(\lambda, b)$  für alle  $\lambda \subset E^{r-1}$ .*

*Sind  $a$  und  $b$  ko- oder kontravariant, so bilden sie ein inseparables Paar, das heißt, entweder haben  $a$  und  $b$  in allen Cokreisen das gleiche Vorzeichen oder in allen Cokreisen verschiedene Vorzeichen.*

Anschaulich bedeutet das, dass die zu  $a$  und  $b$  gehörigen Hyperebenen fast parallel verlaufen, an einer Stelle schneiden sie sich natürlich. Die Kontraktionen  $M/a$  und  $M/b$  sind gleich (bis auf Vertauschung von  $a$  und  $b$  und eventuelle Spiegelung). In der Hyperlinien-Sequenz stehen  $a$  und  $b$  immer nebeneinander, da jede Gerade  $a$  und  $b$  unmittelbar nacheinander schneidet.

Für duale orientierte Matroide gilt Folgendes:

**Lemma 1** *Ein orientiertes Matroid  $M$  und sein duales  $M^*$  haben stets die gleichen inseparablen Paare.*

Beweis: Ist  $(a, b)$  inseparables Paar von  $M$ , so haben die Elemente  $a$  und  $b$  in allen Cokreisen, in denen sie enthalten sind, (o.B.d.A) gleiche Vorzeichen. Dies ist äquivalent dazu, dass  $a$  und  $b$  in allen Kreisen, in denen sie enthalten sind, verschiedene Vorzeichen haben.

Sei  $X$  ein Cokreis mit  $a, b \in X$ . Für alle Kreise  $Y$  mit  $a, b \in Y$  gilt wegen Orthogonalität (und da die Träger in diesem Fall nicht disjunkt sind)  $X_a * Y_a = -X_b Y_b$ . Nach Voraussetzung gilt  $X_a = X_b$ , und so folgt  $Y_a = -Y_b$ .

Sind  $a, b$  also kovariant in  $M$ , so sind sie kontravariant in  $M^*$ , und umgekehrt.

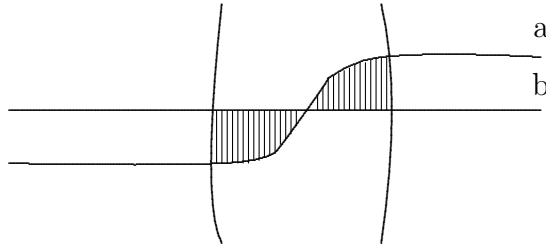
Inseparable Elemente werden oft verwendet, um Ein-Element-Erweiterungen eines orientierten Matroids zu beschreiben. Das liegt daran, dass die Erweiterung um ein fast paralleles Element nur wenig an der Gesamtstruktur ändert und die meisten Eigenschaften des orientierten Matroids erhält. Lexikographische Erweiterungen, die in Abschnitt 6.2 erläutert werden, sind eine einfache Methode, um solche Einfüge-Operationen zu definieren.

## 5.2 Mutationen und inseparable k-Mengen

In Bezug auf die Veränderung der Mutationen kann man folgende Beobachtungen machen: Erweitert man ein orientiertes Matroid  $M$  derart, dass das Erweiterungselement  $a$  ein inseparables Paar mit einem schon vorhandenen Element  $b$  bildet, so bleiben alle Mutationen, die nicht mit  $b$  inzidieren, er-

halten.

Mutationen der Form  $(b, \lambda)$  können übergehen in Mutationen der Form  $(a, \lambda)$  oder  $(a, b, \lambda)$ . Außerdem werden im Allgemeinen Mutationen am Schnitt von  $a$  und  $b$  entstehen. Für Rang 3 sieht man sofort, dass es zu jedem inseparablen Paar  $(a, b)$  genau zwei Mutationen der Form  $(a, b, \lambda)$  gibt.



Dreiecke an inseparablen Elementen im Rang 3

Auch im Rang 4 sind Mutationen an inseparablen Elementen  $a, b$  unumgänglich. Da in den Kontraktionen  $M/a$  und  $M/b$  je mindestens drei Dreiecke an  $b$  bzw.  $a$  anliegen und alle Geraden  $a$  und  $b$  unmittelbar nacheinander schneiden, gibt es mindestens drei Mutationen der Form  $(a, b, x, y)$ .

In höheren Rängen reicht es nicht aus, inseparable Paare zu finden, um Mutationen zu garantieren. Eine Konstruktion im Rang 5 liefert zum Beispiel ein orientiertes Matroid mit inseparablen Paar  $(a, b)$ , aber ohne Mutation  $(a, b, x, y, z)$ :

Es gibt im Rang 4 orientierte Matroide mit mutationslosen Elementen. Das kleinste bekannte Beispiel ist das von Bokowski und Rohlfs beschriebene  $E(17)$  mit 17 Elementen, siehe [6]. Bettet man das  $E(17)$  in ein orientiertes Matroid  $M$  im Rang 5 so ein, dass  $M/a \cong M/b \cong E(17)$  und  $a$  und  $b$  in  $M/b$  und  $M/a$  jeweils das mutationslose Element sind. Dann gibt es in  $M$  keine Mutation der Form  $(a, b, \dots)$ .

Inseparable  $k$ -Mengen sind eine Verallgemeinerung der inseparablen Paare für höhere Ränge.

**Definition 15** Sei  $M$  uniformes orientiertes Matroid mit Rang  $r$ .  $\lambda \subset \Lambda(E, k)$  heißt inseparable  $k$ -Menge, falls  $\lambda \in \text{Mut}(M/\tau)$  für alle  $\tau \in \Lambda(E \setminus \lambda, r - k)$  ist.

Für  $k = 2$  ist  $\lambda = (a, b)$  ein inseparables Paar. Für  $k = r$  ist  $\lambda$  eine Mutation. Der folgende Satz zeigt, dass auch schon für  $k < r$  inseparable  $k$ -Mengen und Mutationen zusammenhängen, [9, Mnev, Richter-Gebert]:

**Satz 6** *Ist  $M$  uniformes orientiertes Matroid mit Rang  $r$ ,  $a \in E$ . Ist  $\lambda$  eine inseparable  $r - 2$ -Menge oder eine inseparable  $r - 1$ -Menge,  $a \in \lambda$ , so gibt es eine Mutation, die  $a$  enthält.*

Beweisskizze:

Sei  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-2})$  eine inseparable  $r - 2$ -Menge, welche das Element  $a$  enthält. Die Kontraktion  $M/\{\lambda_1, \dots, \lambda_{r-3}\}$  hat Rang 3. Dort existiert mindestens eine Mutation  $(\lambda_{r-2}, \lambda_{r-1}, \lambda_r)$ , die  $\lambda_{r-2}$  enthält.  $(\lambda_1, \dots, \lambda_{r-2}, \lambda_{r-1}, \lambda_r)$  ist dann eine Mutation von  $M$ .

Für einen vollständigen Beweis siehe [9, Mnev, Richter-Gebert].

Im Rang 4 garantiert schon ein inseparables Paar die Existenz von Mutationen. Im Rang 5 muss man bereits die inseparablen 3-Mengen oder 4-Mengen untersuchen, um etwas aussagen zu können.

# 6

## Ein-Element-Erweiterungen und Mutationen

Fügen wir zu einer Punktconfiguration einen neuen Punkt hinzu, so ist seine Lage (kombinatorisch) eindeutig bestimmt, wenn wir für jede Hyperebene festlegen, auf welcher Seite  $p$  sich befinden soll. Ein-Element-Erweiterungen können daher durch Funktionen beschrieben werden, die jedem Cokreis eine neue Komponente zuordnen.

Eine solche Funktion  $\sigma : C^* \rightarrow \{-1, 1\}$  mit  $\{(Y, \sigma(Y)) \mid Y \in C^*\} \subset C^*(M \cup p)$ , wobei der letzte Eintrag in jedem Cokreis zum neuen Element  $p$  gehört, heißt *Lokalisation*. Auf der Menge der Lokalisationen ist eine Komposition  $\sigma_1 \circ \sigma_2$  definiert, die darin besteht, dass der neue Punkt von  $\sigma_1$  in Richtung des neuen Punktes von  $\sigma_2$  verschoben wird.

### 6.1 Zerschneiden von Mutationen

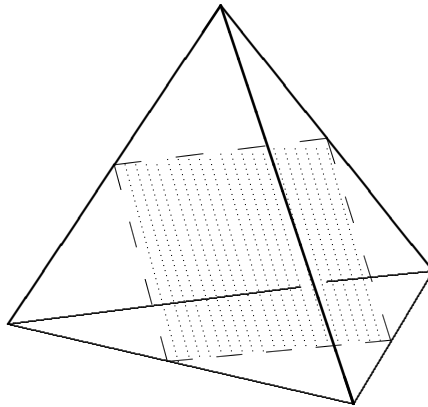
Wie kann man Mutationen aus einem orientierten Matroid durch Einfügen einzelner Elemente entfernen? Das Einfügen soll die Uniformität des orientierten Matroids erhalten. Durch Ein-Element-Erweiterungen kann man alle orientierten Matroide aufzählen. Wie wir gesehen haben, gibt es orientierte Matroide, die weniger Mutationen als Elemente haben und damit Shannons Theorem widersprechen. Es ist also in bestimmten Situationen möglich, mit

dem Einfügen eines neuen Elements zumindest keine neuen Mutationen zu erzeugen.

Prinzipiell kann man jede Mutation mit nur einem Schnitt zerstören. Dabei entstehen jedoch an anderen Stellen des orientierten Matroids neue Mutationen, deren Anzahl man möglichst klein halten will.

Beim Zerschneiden einer bestimmten Mutation  $(a_1, \dots, a_r)$  mit einem neuen Element  $b$  möchte man meist vermeiden, dass eine neue Mutation der Form  $(a_{i_1}, \dots, a_{i_{r-1}}, x)$  entsteht. Das bedeutet für das Arrangement, dass im Inneren des alten Simplex ein neuer Simplex entsteht, man hat also keine Mutation zerstört, sondern lediglich eine Seite des Simplex durch das neue Element ersetzt.

Beim Zerschneiden eines Dreiecks, also einer Mutation im Rang 3, entsteht im Inneren des alten Dreiecks stets wieder ein Dreieck. Im Rang 4 jedoch kann man eine Mutation, im Modell von Folkman und Lawrence ein Tetraeder, mit einem Element so zerschneiden, dass im Inneren der alten Mutation kein neuer Tetraeder, sondern zwei Prismen mit dreieckiger Grundfläche entstehen.



Mutation im Rang 4  
von einer Ebene zerschnitten

Ein Simplex der Dimension 4 (Rang 5) hat 5 Tetraeder als Seiten. Auch hier ist es möglich, ein neues Element einzufügen, so dass keine neue Mutation im Inneren der alten entsteht. Allgemein kann man folgende Beobachtung

machen:

Ein  $k$ -Simplex hat den vollständigen Graphen  $K_k$  als Gerüst. Zerteilt man diesen in zwei Hälften mit  $i$  und  $k - i$  Knoten, so erhält man  $(k - i) * i$  Schnittpunkte mit der neuen Hyperebene. Damit hier ein neuer Simplex entstehen kann, muss gelten:

$$(k - i) * i + (k - i) = k \text{ oder } (k - i) * i + i = k$$

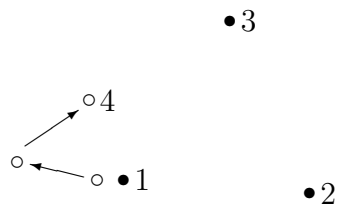
$$\iff i = 0 \text{ oder } i = k \text{ oder } i = k - 1 \text{ oder } i = 1$$

Ein  $k$ -Simplex kann also für alle  $k > 3$  durch einen Schnitt zerstört werden, wenn auf jeder Seite der Schnitt-Hyperebene mindestens 2 Knoten liegen.

## 6.2 Lexikographische Erweiterungen

Lexikographische Erweiterungen bieten eine Möglichkeit, die einfachsten ein-elementigen Erweiterungen eines orientierten Matroids zu beschreiben. Dabei handelt es sich um das Einfügen inseparabler Elemente.

**Definition 16** Sei  $M$  orientiertes Matroid auf der Grundmenge  $E$ ,  $I = [e_1, \dots, e_k]$  eine geordnete Untermenge von  $E$  und  $\alpha = [\alpha_1, \dots, \alpha_k] \in \{+, -\}^k$ . Dann ist die lexikographische Erweiterung von  $M$  um das neue Element  $p := [I^\alpha] = [e_1^{\alpha_1}, \dots, e_k^{\alpha_k}]$  die Ein-Element-Erweiterung  $M \cup p$  gegeben durch die Lokalisation  $\sigma : C^* \rightarrow \{+, -, 0\}$  mit  $\sigma[e_1^{\alpha_1}, \dots, e_k^{\alpha_k}] = \sigma[e_1^{\alpha_1}] \circ \dots \circ \sigma[e_k^{\alpha_k}]$ .



Einfügen des Punktes 4 nach  
der lexikographischen Erweiterung  
 $[1^+, 2^-, 3^+]$

Das heißt, der neue Punkt wird bei  $e_1$  eingefügt, dann in Richtung von  $e_2$  verschoben, u.s.w. Das Beispiel zeigt die einzelnen Schritte der Einfügeope-

ration: Der neue Punkt wird bei 1 eingefügt, dann in zu 2 entgegengesetzter Richtung verschoben. Nun liegt er in einer Geraden mit 1 und 2, die Erweiterung  $[1^+, 2^-]$  wäre also nicht uniform. Nach der Verschiebung in Richtung des Punktes 3 ist die allgemeine Lage wieder hergestellt.

Das zu einer lexikographischen Erweiterung passende Chirotop ist definiert durch

$$\chi(b) = \chi(b) \text{ falls } p \notin b$$

und

$$\chi(f_1, \dots, f_{r-1}, p) = \alpha_1 * \chi(f_1, \dots, f_{r-1}, e_i)$$

für das kleinste  $i$ , so dass das nicht 0 ist, also

$$\begin{aligned} \chi(f_1, \dots, f_{r-1}, p) \\ = \alpha_1 \chi(f_1, \dots, f_{r-1}, e_1) \circ \alpha_2 \chi(f_1, \dots, f_{r-1}, e_2) \dots \circ \alpha_k \chi(f_1, \dots, f_{r-1}, e_k) \end{aligned}$$

Damit ist  $p$  auf jeden Fall inseparabel zu  $e_1$ : In allen Cokreisen, in denen sowohl  $e_1$  als auch  $p$  zum Träger gehören, haben sie entweder immer das gleiche Vorzeichen, falls  $\alpha_1 = +1$ , oder immer verschiedene Vorzeichen, falls  $\alpha_1 = -1$ . Für alle  $\lambda \in E^{r-1}$ ,  $e_1, p \notin \lambda$  gilt nämlich:  $\chi(\lambda, p) = \alpha_1 \chi(\lambda, e_1)$ .

Die weiteren Komponenten der lexikographischen Erweiterung beschreiben, an welcher Stelle  $p$   $e_1$  schneidet. Das geschieht genau parallel zu  $e_2$ , das heißt, dass in der Kontraktion  $M/e_1$   $p$  inseparabel zu  $e_2$  ist.

Allgemein gilt:

**Lemma 2** *Ist  $[e_1^{\alpha_1}, \dots, e_k^{\alpha_k}]$  eine lexikographische Erweiterung von  $M$ , so ist  $[e_2^{\alpha_2}, \dots, e_k^{\alpha_k}]$  eine lexikographische Erweiterung von  $M/e_1$ .*

Betrachten wir ein uniformes orientiertes Matroid, und soll die Uniformität durch die lexikographische Erweiterung erhalten bleiben, so kann man zusätzliche Anforderungen an  $e_1, \dots, e_k$  stellen:

1. Es muss gelten  $k \geq r$ .
2. Die  $e_i$  müssen paarweise verschieden sein.

Im Fall  $\{e_1, \dots, e_k\} \subset \{f_1, \dots, f_{r-1}\}$ , der auftreten kann, falls eine der beiden Bedingungen nicht erfüllt ist, ist  $\chi(f_1, \dots, f_{r-1}, p) = 0$ . Dies widerspricht der Uniformität der Erweiterung.

Ist  $k > r$ , so haben die  $e_i$  mit  $i > r$  keinen Einfluss auf die Position des neuen Elements, da

$$\alpha_1 \chi(f_1, \dots, f_{r-1}, e_1) \circ \alpha_2 \chi(f_1, \dots, f_{r-1}, e_2) \dots \circ \alpha_r \chi(f_1, \dots, f_{r-1}, e_r) \neq 0$$

für alle  $f_1, \dots, f_{r-1}$ , wenn das ursprüngliche orientierte Matroid  $M$  uniform ist.

Wir betrachten im Folgenden nur lexikographische Erweiterungen mit  $k = r$  und  $|\{e_1, \dots, e_r\}| = r$ . Das sind genau die Erweiterungen, die die Uniformität von  $M$  erhalten.

# 7

## Konstruktionen im Rang 4

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit Konstruktionen von Klassen orientierter Matroide mit wenigen Mutationen im Rang 4. Das Vorgehen ist bei allen Verfahren ähnlich. Man hat ein orientiertes Matroid gegeben, welches gewisse Voraussetzungen erfüllt (zum Beispiel hat es bereits wenige Mutationen und inseparable Elemente). An einer geeigneten Stelle fügt man nun ein Element oder eine ganze Substruktur, bestehend aus mehreren Elementen, ein. Das entstehende orientierte Matroid erfüllt nun wiederum die Voraussetzungen, so dass die Erweiterung wiederholt werden kann und induktiv eine ganze Klasse orientierter Matroide entsteht.

Die hier beschriebenen Verfahren haben auch alle gemeinsam, dass sie das geometrische Modell nach Folkman und Lawrence verwenden, um die Konstruktion zu beschreiben. Im Rang 4 ist das noch sehr anschaulich, die Elemente entsprechen Pseudoebenen und die Mutationen Tetraedern. Für höhere Ränge ist es zwar nicht mehr möglich, solche Konstruktionen geometrisch intuitiv zu beschreiben, prinzipiell ist aber die Idee, Substrukturen so zu erweitern, dass wenige Mutationen dabei entstehen, auch in höherer Dimension durchführbar.

## 7.1 $n$ Elemente und $n-1$ Mutationen

Die einfachste dieser Konstruktionen besteht aus dem Einfügen eines einzigen weiteren Elements in ein  $X(8)$ . Dabei erhält man nur eine Mutation dazu, so dass ein orientiertes Matroid mit 9 Elementen und 8 Mutationen entsteht.

**Satz 7** *Gegeben ein uniformes orientiertes Matroid  $M$  im Rang 4 mit  $m$  Mutationen und zwei inseparablen Elementen  $(1, 2)$ . Dann kann man  $M$  derart um ein Element erweitern, dass man ein orientiertes Matroid  $M$  mit  $m + 1$  Mutationen erhält.*

Die Erweiterung besteht aus dem Einfügen eines Elements, welches mit einem der Elemente aus dem inseparablen Paar wiederum ein solches Paar bildet. Eine der Mutationen  $(1, 2, x, y)$  muss dabei durch das neue Element  $p$  zerschnitten und durch eine Mutation  $(1, 2, x, p)$  ersetzt werden. Am Schnitt von 1, 2 und  $p$  entsteht dann nur genau eine neue Mutation.

Die Operation kann beliebig oft wiederholt werden, da es immer inseparable Paare gibt, und im Rang 4 auch immer Mutationen am Schnitt derselben. Damit folgt sofort folgender Satz von Bokowski und Richter-Gebert, siehe [6, Bokowski, Rohlf].

**Satz 8** *Für jedes  $n > 7$  gibt es im Rang 4 ein orientiertes Matroid mit  $n$  Elementen und  $n - 1$  Mutationen.*

## 7.2 $4n$ Elemente und $3n+1$ Mutationen

Anstatt eines einzelnen Elements kann man auch ganze Strukturen in ein Arrangement einfügen. Dieser Abschnitt beschreibt, wie zwei Kopien des  $X(8)$  zusammengefügt werden können, so dass ein orientiertes Matroid mit 12 Elementen und nur 10 Mutationen entsteht. Auch diese Konstruktion kann induktiv fortgeführt werden, so dass die Konstruktion eine unendliche Klasse orientierter Matroide mit  $4n$  Elementen (da jedes Mal 4 Elemente eingefügt werden) und nur  $3n + 1$  Mutationen liefert [11, Richter-Gebert].

Voraussetzung:  $M$  sei ein uniformes orientiertes Matroid mit Rang 4 mit  $k$  Mutationen.  $M$  enthalte eine Mutation  $(1, 2, 3, 4)$ , das Paar  $(1, 2)$  sei inseparabel.

Dann kann man vier Elemente  $a, b, c, d$  einfügen, so dass das neue orientierte Matroid  $M(1, 2, 3, 4)$  genau  $k+3$  Mutationen enthält. Die vier Elemente werden so eingefügt, dass sie außerhalb einer kleinen Umgebung parallel zu 1, 2 verlaufen. Lokal werden sie so verformt, dass sie mit den Elementen 1, 2, 3, 4 genau die Struktur eines inneren  $X(8)$  bilden.

Die Mutationen, die nicht zu 1 und 2 inzident sind, werden dabei nicht verändert. Die Mutation  $(1, 2, 3, 4)$  wird durch 4 neue Mutationen ersetzt. Danach sind die Elemente  $a$  und  $b$  wiederum inseparabel, so dass man die Konstruktion wiederholen kann und folgenden Satz erhält, siehe [11, Richter-Gebert]:

**Satz 9** *Für jedes  $n \geq 2$  existiert ein uniformes orientiertes Matroid im Rang 4 mit  $4n$  Elementen und  $3n+1$  Mutationen und einem inseparablen Paar  $(a, b)$ .*

Für  $n = 2$  ist das genau das  $X(8)$  mit dem inseparablen Paar  $(1, 2)$ .

Durch das Zerstören der Mutation  $(1, 2, 3, 4)$  in der beschriebenen Konstruktion wird die Anzahl der zum Element 4 inzidenten Mutationen um 1 reduziert,  $|Mut_4(M(1, 2, 3, 4))| = |Mut_4(M) - 1|$ .

Aus diesem Grund kann die Konstruktion auch dazu verwendet werden, ein orientiertes Matroid mit einem mutationslosen Element herzustellen. Man löscht zum Beispiel nacheinander alle zum Element 8 inzidenten Mutationen, das sind im  $X(8)$  genau 3 Stück, und erhält das  $R(20)$ , in dem keine Mutation das Element 8 enthält, siehe [11].

Statt des  $X(8)$  können auch andere orientierte Matroide verwendet werden. Prinzipiell genau die gleiche Methode liefert eine Klasse orientierter Matroide mit  $7n+4$  Elementen und nur  $5n+4$  Mutationen, wenn statt des  $X(8)$  eine Erweiterung des  $X(8)$  mit 11 Elementen und 9 Mutationen verwendet wird. Der folgende Satz von Bokowski, siehe [6, Bokowski, Rohlf],

stellt die Verallgemeinerung dar:

**Satz 10** *Seien  $M, N$  orientierte Matroide im Rang 4 mit  $m \geq 5, n \geq 5$  Elementen und folgenden Eigenschaften:*

1.  *$M$  hat eine Mutation  $(1, 2, 3, 4)$  und ein inseparables Paar  $(1, 2)$*
2.  *$N$  hat eine Mutation  $(1, 2, 3, 4)$  und ein inseparables Paar  $(3, 4)$*
3. *In der Pseudo-Hyperebene 3 von  $N$  ist die Pseudogerade  $3 \cap 4$  inzident mit genau drei Dreiecken.*

*Dann existiert ein uniformes orientiertes Matroid  $M \diamond N$  mit  $m + n - 4$  Elementen und  $|Mut(M)| + |Mut(N)| - 4$  Mutationen.*

### 7.3 Kleinstes Gegenbeispiel im Rang 4

Bokowski hat weiterhin gezeigt, dass Las Vergnas Vermutung für kleine orientierte Matroide gilt: Ein kleinstes Gegenbeispiel im Rang 4 müsste aus mindestens 13 Elementen bestehen, siehe [6].

Wegen der Minimalität müsste nach Entfernen eines jeden Elementes eine Mutation entstehen. Jede Hyperebene des Arrangements muss einen Simplex in zwei Prismen mit dreieckiger Grundfläche zerschneiden, der nach ihrem Entfernen eine Mutation darstellen würde.

Schneidet man einen Tetraeder so mit einer Hyperebene, dass zwei solche Prismen entstehen, so bilden drei der Mutations-Hyperebenen mit der Schnitt-Hyperebene wiederum simpliziale Regionen außerhalb des Tetraeders. Um diese zu zerschneiden, ohne diesmal wieder simpliziale Regionen zu erzeugen, benötigt man je mindestens drei Elemente. Damit muss ein minimales Beispiel schon mindestens  $5 + 2 * 3 = 11$  Elemente besitzen.

Mit drei Elementen kann man eine Mutation auf genau eine Art zerschneiden, so dass eine der Seitenflächen nicht geschnitten wird. Dabei entstehen allerdings wieder Prismen mit dreieckiger Grundfläche innerhalb der Muta-

tion, die außerhalb der zerschnittenen Mutation zu simplizialen Regionen führen.

Um diese zu zerschneiden, sind weitere Elemente nötig. Insgesamt braucht man mindestens 13 Pseudo-Ebenen.

# 8

## Eine Konstruktion für den allgemeinen Fall

### 8.1 $n-1/n$

Im Abschnitt 5.1 wurde besprochen, wie man für jedes  $n \geq 8$  ein orientiertes Matroid im Rang 4 mit  $n$  Elementen und  $n-1$  Mutationen konstruieren kann. Das im Folgenden beschriebene Verfahren baut auf den Ergebnissen für Rang 4 auf und verwendet die Dualität, um für jeden Rang eine Klasse orientierter Matroide mit  $n$  Elementen und  $n-1$  Mutationen zu konstruieren.

**Satz 11** *Für jedes  $r \geq 4$  und jedes  $n \geq r+4$  gibt es ein orientiertes Matroid  $M$  im Rang  $r$  mit  $n$  Elementen und  $n - 1$  Mutationen.*

Zum Beweis zuerst ein

**Lemma 3** *Für jedes  $r \geq 4$  und  $n = r+4$  gibt es ein orientiertes Matroid  $M$  im Rang  $r$  mit  $n$  Elementen und  $n-1$  Mutationen.*

Im Rang 4 gibt es zu jedem  $n$  ein orientiertes Matroid  $M$  mit  $n$  Elementen und  $n - 1$  Mutationen.  $M^*$  hat den Rang  $n - 4$ . Wie wir schon gezeigt haben, hat  $M^*$  die gleiche Anzahl Mutationen wie  $M$ .

Für jeden Rang  $r$  erhalten wir so ein minimales orientiertes Matroid  $M$  mit  $n = r + 4$  Elementen und  $n - 1 = r + 3$  Mutationen. Minimal für  $r$  ist  $M$

deshalb, weil Shannons Theorem für  $r = 3$  und wegen Dualität für alle orientierten Matroide mit  $n \leq r+3$  gültig ist. Aus diesem minimalen orientierten Matroid werden wir nun durch Ein-Element-Erweiterungen weitere erzeugen, die die gewünschte Eigenschaft, nämlich das Verhältnis von Mutationen zu Elementen  $n - 1/n$  erhalten.

Wir beginnen unsere Konstruktion mit einem  $X(8)$  mit folgenden inseparablen Paaren:  $(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8)$ .

Wir wollen in unserer Konstruktion stets die Eigenschaft beibehalten, dass  $(n-1, n)$  ein inseparables Paar ist. Weiterhin soll die Erweiterung immer zwischen diesen beiden Elementen liegen, das heißt wir fügen das Element  $n+1$  immer so ein, dass aus dem Paar  $(n-1, n)$  die beiden Paare  $(n-1, n+1)$  und  $(n, n+1)$  werden. In der Kontraktion  $M/n$  sind dann  $(n-2, n-1)$  ein inseparables Paar.

Allgemein gilt für alle Zwischenschritte die folgende

**Invariante 1** *In der Kontraktion  $M/\{n, n-1, \dots, n-k\}$  für  $k < r-4$  existiert immer das inseparable Paar  $(n-k-2, n-k-1)$ .*

Das liegt daran, dass dieses inseparable Paar genau durch das Einfügen des Elementes  $n-k$  getrennt wurde, in der Kontraktion bleibt es deshalb erhalten. Bei dieser Erweiterung bleiben alle Mutationen, die nicht zwischen den beiden inseparablen Elementen  $n-1$  und  $n$  liegen, gleich. Nur am Schnitt des Paares verändert sich die Struktur.

Im Rang 4 ist eine solche Erweiterung am inseparablen Paar  $(n-1, n)$  immer so möglich, dass nur genau eine neue Mutation am Schnitt von  $n-1, n, n+1$  entsteht, wie wir oben schon gesehen haben. Betrachten wir nun ein orientiertes Matroid  $M$  im Rang  $r > 4$  mit  $n \geq r+4$  Elementen, welches durch Erweiterungen der oben beschriebenen Art entstanden ist, das heißt, unter anderem ist das Paar  $(n-1, n)$  inseparabel.

Mit der folgenden Charakterisierung von Mutationen kann man das Problem im Rang  $r$  auf eines im Rang  $r-1$  reduzieren:

$\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_r)$  ist Mutation genau dann, wenn für jede Zerlegung  $\lambda' \cup \lambda'' = \lambda$   $\lambda'$  eine Mutation in  $M/\lambda''$  ist.

**Lemma 4** *Sei  $M$  ein orientiertes Matroid,  $(a, b)$  ein inseparables Paar von  $M$ . Kann man  $M/a$  so um ein Element  $p$  erweitern, dass in der Kontraktion  $M/a$  nur eine neue Mutation am Element  $b$  entsteht, so kann man diese Erweiterung auf  $M$  fortsetzen, so dass  $M \cup p$  nur eine Mutation mehr hat als  $M$ .*

Beweis:  $p$  kann in  $M$  zwischen  $a$  und  $b$  eingefügt werden, so dass nur am Schnitt von  $a$  und  $b$  neue Mutationen entstehen. Da in  $M/a$  nur eine neue Mutation der Form  $(b, \dots)$  dazu kommt, kann es auch in  $M$  höchstens eine neue Mutation  $(a, b, \dots)$  geben.

Es reicht also, die Erweiterung so vorzunehmen, dass in der Kontraktion  $M/n$  am Element  $n - 1$  höchstens eine neue Mutation entsteht. Da wir hier wieder das inseparable Paar  $(n - 1, n - 2)$  vorfinden, können wir uns wiederum auf die Kontraktion  $M/n/n - 1$  beschränken. Wir können so immer weiter kontrahieren, bis wir im Rang 4 angekommen sind. Hier können wir in der Kontraktion  $M/\{n, n - 1, \dots, n - (r - 3)\}$  das neue Element so einfügen, dass nur höchstens eine neue Mutation am Element  $n - (r - 4)$  entsteht.

Durch die Fortsetzung der Erweiterung je zwischen zwei inseparablen Elementen in allen Kontraktionen mit Rang  $\geq 4$  können keine weiteren Mutationen entstehen, das heißt, nur die eine neue Mutation aus Rang 4 kann Teil einer neuen Mutation in  $M$  sein.

## 8.2 Die Konstruktion mit lexikographischen Erweiterungen

Um die Konstruktion durchzuführen, eignen sich besonders lexikographische Erweiterungen. Diese werden von unten her aufgebaut, das heißt rekursiv. Im Rang 4 ist es einfach, eine solche Erweiterung zu finden, wie im Abschnitt 7.1 beschrieben ist.

Um die Invariante aufrecht zu erhalten, dass  $(n - k - 2, n - k - 1)$  in der Kontraktion  $M/\{n, n - 1, \dots, n - k\}$  immer ein inseparables Paar ist, wird auch im Rang 4 das neue Element zwischen diesen beiden Elementen eingefügt. Damit ist der Rekursionsanker,  $r = 4$ , beschrieben.

Im beliebigen Rang  $r$  wird zuerst eine geeignete lexikographische Erweiterung für die Kontraktion  $M/n$  gesucht. Diese besteht aus  $r-1$  Elementen zwischen 1 und  $n - 1$ . Dabei steht das größte Element  $(n - 1)$  immer vorn, so dass folgende Struktur entsteht:

$$[(n - 1)^{\alpha_2}, (n - 2)^{\alpha_3}, \dots, (n - k - 1)^{\alpha_{r-3}}, (n - k - 2)^{\alpha_{r-2}}, x^{\alpha_{r-1}}, y^{\alpha_r}]$$

Dabei ist  $[(n - k - 1)^{\alpha_{r-3}}, (n - k - 2)^{\alpha_{r-2}}, x^{\alpha_{r-1}}, y^{\alpha_r}]$  die lexikographische Erweiterung der Rang 4- Kontraktion.  $x$  und  $y$  sind zwei beliebige Elemente, die mit  $n - k - 1$  und  $n - k - 2$  eine Mutation bilden.

Dann wird  $\alpha_1 * n$  vorn angefügt, so dass das neue Element zwischen  $n$  und  $n - 1$  liegt. Das kann allein durch die Wahl von  $\alpha_1$  sichergestellt werden, die restlichen  $\alpha_i$  müssen dafür nicht verändert werden.

### 8.3 Ein Beispiel

Als Beispiel wird die Konstruktion eines orientierten Matroids im Rang 6 mit 12 Elementen und 11 Mutationen gezeigt.

Wir beginnen mit einem  $X(8)$  mit den inseparablen Paaren  $(1, 2)$ ,  $(3, 4)$ ,  $(5, 6)$  und  $(7, 8)$  und folgenden 7 Mutationen:

$$\begin{array}{lll} (1, 2, 3, 4) & (1, 2, 5, 6) & (1, 2, 7, 8) \\ (1, 3, 5, 7) & (3, 4, 5, 6) & (3, 4, 7, 8) \\ (5, 6, 7, 8) & & \end{array}$$

Das  $X(8)$  wird nun durch zwei Elemente 9, 10 erweitert. Die erste lexikographische Erweiterung ist  $[8^+, 7^+, 1^-, 2^-]$ , so wird das Element 9 zwischen 8 und

7 eingefügt. Danach folgt die Erweiterung  $[9^+, 8^+, 1^-, 7^-]$  auf 10 Elemente. Das so erhaltene orientierte Matroid hat die inseparablen Paare

$$(3, 4) \quad (5, 6) \quad (7, 9) \quad (8, 10) \quad (9, 10)$$

und die 9 Mutationen

$$\begin{array}{ccc} (1, 2, 3, 4) & (1, 2, 5, 6) & (1, 3, 5, 7) \\ (1, 8, 9, 10) & (2, 7, 9, 10) & (3, 4, 5, 6) \\ (3, 4, 7, 9) & (5, 6, 8, 10) & (7, 8, 9, 10) \end{array}$$

Demzufolge hat das dazu duale orientierte Matroid mit 10 Elementen im Rang 6 dieselben inseparablen Paare und folgende (komplementäre) Mutationen:

$$\begin{array}{ccc} (1, 2, 3, 4, 5, 6) & (1, 2, 3, 4, 7, 9) & (1, 2, 5, 6, 8, 10) \\ (1, 2, 7, 8, 9, 10) & (1, 3, 4, 5, 6, 8) & (2, 3, 4, 5, 6, 7) \\ (2, 4, 6, 8, 9, 10) & (3, 4, 7, 8, 9, 10) & (5, 6, 7, 8, 9, 10) \end{array}$$

Dieses orientierte Matroid wird nun wiederum durch zwei Elemente erweitert, so dass wir auf die gewünschten 12 Elemente kommen. Die erste dazu nötige lexikographische Erweiterung wird bestimmt, indem wir zuerst eine Erweiterung der Rang 4-Kontraktion an den Elementen 9, 10 vornehmen. Diese ist äquivalent zum  $X(8)$  und kann durch die lexikographische Erweiterung  $[8^+, 7^+, 1^-, 2^+]$  so ergänzt werden, dass nur eine neue Mutation am Element 8 entsteht.

Damit ist  $[10^+, 9^+, 8^+, 7^+, 1^-, 2^+]$  die lexikographische Erweiterung im Rang 6, die wir gesucht haben, das neue Element wird in der Kontraktion so eingefügt, dass nur eine neue Mutation entsteht und liegt ansonsten zwischen den Elementen 8, 9 und 9, 10. Das damit entstehende orientierte

Matroid hat 11 Elemente, die inseparablen Paare

$$(3, 4) \quad (5, 6) \quad (9, 11) \quad (10, 11)$$

und die 10 folgenden Mutationen:

$$\begin{array}{lll} (1, 2, 3, 4, 5, 6) & (1, 2, 3, 4, 7, 9) & (1, 2, 5, 6, 8, 10) \\ (1, 3, 4, 5, 6, 8) & (1, 7, 8, 9, 10, 11) & (2, 3, 4, 5, 6, 7) \\ (2, 4, 6, 8, 9, 11) & (2, 7, 8, 9, 10, 11) & (3, 4, 8, 9, 10, 11) \\ (5, 6, 7, 9, 10, 11) & & \end{array}$$

Nun fehlt nur noch ein Element. Die lexikographische Erweiterung wird wieder durch Betrachtung der Kontraktion an den Elementen 11 und 10 bestimmt. Diese Kontraktion ist eine Ein-Element-Erweiterung des  $X(8)$  mit 8 Mutationen und kann durch die lexikographische Erweiterung  $[9^+, 8^+, 1^-, 7^-]$  passend erweitert werden.

Im Rang 6 fügen wir also das 12. Element gemäß der lexikographischen Erweiterung  $[11^+, 10^+, 9^+, 8^+, 1^-, 7^-]$  ein. Damit erhalten wir ein orientiertes Matroid mit den gewünschten Eigenschaften, das heißt, es hat Rang 6, 12 Elemente und 11 Mutationen. Es hat die inseparablen Paare

$$(3, 4) \quad (5, 6) \quad (10, 12) \quad (11, 12)$$

und die 11 Mutationen

$$\begin{array}{lll} (1, 2, 3, 4, 5, 6) & (1, 2, 3, 4, 7, 9) & (1, 2, 5, 6, 8, 10) \\ (1, 3, 4, 5, 6, 8) & (1, 8, 9, 10, 11, 12) & (2, 3, 4, 5, 6, 7) \\ (2, 4, 6, 8, 9, 11) & (2, 7, 9, 10, 11, 12) & (3, 4, 8, 9, 10, 12) \\ (5, 6, 7, 10, 11, 12) & (7, 8, 9, 10, 11, 12) & \end{array}$$

# 9

## Software

Im Rahmen dieser Diplomarbeit ist ein Java-Programm zur Manipulation und Generierung uniformer orientierter Matroide entstanden. Mit diesem Programm kann man zum Beispiel in der Darstellung zwischen Hyperlinien-Sequenz und Chirotop hin- und herwechseln und das duale orientierte Matroid berechnen.

Zur Manipulierung einzelner orientierter Matroide verfügt das Programm über eine graphische Benutzeroberfläche. Damit lassen sich zum Beispiel Reorientierungen an einzelnen Elementen berechnen, Mutationen flippen und Umbenennungen von Elementen vornehmen.

Natürlich bestimmt das Programm die inseparablen Paare und Mutationen eines orientierten Matroids. Es zeigt Kontraktionen und Deletionen an beliebigen Elementen.

Zu einem orientierten Matroid lassen sich außerdem alle Ein-Element-Erweiterungen bestimmen. Das ist jedoch nur bei kleinen Beispielen sinnvoll, da die Laufzeit exponentiell wächst.

Von größerem Nutzen für die gezielte Suche nach interessanten Beispielen sind die lexikographischen Erweiterungen. Zu einem gegebenen orientierten Matroid und einer lexikographischen Erweiterung kann das neue orientierte Matroid berechnet werden.

Für die in Abschnitt 8.1 beschriebene Konstruktion findet das Programm passende lexikographische Erweiterungen. Dabei wird der beschriebene re-

kursive Algorithmus verwendet. Damit ist es insbesondere möglich, für beliebiges  $r$  und  $n$  orientierte Matroide mit den bekannten Eigenschaften, nämlich Verhältnis von Elementen zu Mutationen  $n/n-1$ , zu erzeugen.

Das Programm ist unter [www.inf.fu-berlin.de/~renkl](http://www.inf.fu-berlin.de/~renkl) als Jar verfügbar.

# 10

## Fazit und offene Fragen

Die im letzten Kapitel beschriebene Konstruktion verallgemeinert ein Verfahren aus Rang 4 auf alle Ränge. Dabei wird allerdings immer nur ein Element eingefügt. Theoretisch ist es leicht möglich, auch die anderen beschriebenen Konstruktionen für den allgemeinen Fall zu erweitern. Ein solches Verfahren in Rang 5 (Dimension 4) oder höher entzieht sich dabei leider der Vorstellungskraft, die der Herleitung der Rang 4-Konstruktionen zugrundeliegt.

Es gibt unendliche Klassen nicht-realasierbarer orientierter Matroide, die weniger Mutationen als Elemente haben. Alle diese bekannten Gegenbeispiele besitzen als Minor das  $X(8)$  und sind somit nicht-euklidisch. Eine interessante offene Frage ist, ob es euklidische orientierte Matroide mit weniger Mutationen als Elementen gibt.

Interessant ist weiterhin die Frage, ob man Aussagen über die Größe eines orientierten Matroids machen kann, welches weniger als  $n$  Mutationen und *nicht* das  $X(8)$  als Minor enthält.

Die angegebene Konstruktion für den allgemeinen Rang verwendet immer das  $X(8)$  als Startpunkt. Die Schranke  $n/n - 1$  kann auch im höheren Rang verbessert werden, wenn im Rang 4 bereits weniger Mutationen vorhanden sind. So ist eine Konstruktion mit einem der Rang 4-orientierten Matroide mit 11 Elementen und 9 Mutationen denkbar. Diese Beispiele weisen allerdings nicht die regelmäßige Struktur an inseparablen Paaren auf, so dass mehr Fälle bedacht werden müssen.

Eine der  $X(11)$ -Reorientierungsklassen besitzt nur ein einziges inseparables Paar, in der Rang 6 - Kontraktion  $X(11)^*/11$  des Dualen sind keine inseparablen Paare mehr vorhanden. Die zweite Reorientierungsklasse besitzt vier inseparable Paare, wäre damit also besser für die Konstruktion geeignet.

Bisher bestanden die Verfahren zur Konstruktion von Beispielen mit wenigen Mutationen aus dem Einfügen eines oder mehrerer Elemente. Eine weitere Idee, die besonders für höhere Ränge anwendbar ist, wäre die Konstruktion eines orientierten Matroids über Kontraktionen. Hier könnte man gezielt Mutationen ausschließen, indem man inseparable  $k$ -Mengen zerstört.

Wie wir gesehen haben, ist die Konstruktion unendlicher Klassen orientierter Matroide mit wenigen Mutationen möglich. Von der Konstruktion eines Beispiels ohne Mutation ist man dabei jedoch noch weit entfernt.

Nach wie vor ist also die Vermutung von Las Vergnas, dass jedes orientierte Matroid mindestens eine Mutation besitzt, offen.

# Anhang A

## Notation

Für Vorzeichenvektoren werden in dieser Arbeit folgende Bezeichnungen verwendet:

Ist  $X$  ein Vorzeichenvektor, also  $X \in \{-1, 0, 1\}^n$ , dann ist

$$X^+ = \{i \in \{1, \dots, n\}, X_i = 1\}$$

$$X^- = \{i \in \{1, \dots, n\}, X_i = -1\}$$

und

$$X^0 = \{i \in \{1, \dots, n\}, X_i = 0\}$$

Damit gilt:  $X^+ \cup X^- \cup X^0 = \{1, \dots, n\}$ .

Der *Träger* von  $X$  wird mit  $\underline{X} = X^+ \cup X^-$  bezeichnet.

Für zwei Vorzeichenvektoren  $Y, X$  ist die Komposition  $X \circ Y$  definiert durch

$$(X \circ Y)_i := \begin{cases} X_i & \text{falls } x_i \neq 0, \\ Y_i & \text{sonst} \end{cases}$$

$E^r$  bezeichnet die Menge aller  $r$ -elementigen Tupel mit Elementen aus  $E$ , also ist für  $E = \{1, \dots, n\}$

$$E^r = \{(x_1, \dots, x_r) \mid x_i \in E \text{ für alle } i = 1, \dots, r\}$$

Die Menge aller geordneten  $r$ -Tupel mit Elementen aus  $E$  wird mit  $\Lambda(E, r)$  bezeichnet, das heißt

$$\Lambda(E, r) = \{(x_1, x_2, \dots, x_r) \mid x_1 < x_2 < \dots < x_r, x_i \in E \text{ für alle } i = 1 \dots r\}$$

# Anhang B

## Das $X(8)$

Hyperlinien-Sequenz:

1	2		3	4	7	8	5	6
1	3		2	-8	-7	-5	-6	-4
1	4		2	-8	-7	-5	-6	3
1	5		2	4	3	7	8	-6
1	6		2	4	3	7	8	5
1	7		2	-8	4	3	-5	-6
1	8		2	7	4	3	-5	-6
2	3		1	8	7	5	6	4
2	4		1	8	7	5	6	-3
2	5		1	-4	-3	-7	-8	6
2	6		1	-4	-3	-7	-8	-5
2	7		1	8	-4	-3	5	6
2	8		1	-7	-4	-3	5	6
3	4		1	2	-5	-6	-7	-8
3	5		1	2	6	4	-8	-7
3	6		1	2	-5	4	-8	-7
3	7		1	2	4	-8	6	5
3	8		1	2	4	7	6	5
4	5		1	2	6	-3	-8	-7
4	6		1	2	-5	-3	-8	-7
4	7		1	2	-3	-8	6	5
4	8		1	2	-3	7	6	5
5	6		1	2	7	8	3	4
5	7		1	-3	-4	-6	8	-2
5	8		1	-3	-4	-6	-7	-2
6	7		1	-3	-4	5	8	-2
6	8		1	-3	-4	5	-7	-2
7	8		1	2	-3	-4	5	6

Chirotop:

$r = 4 \quad n = 8$

+++--+-+--+ +++++--+++ +++++-+++++ ----+-+----++  
++++-+++++ ---++++---- +++--+-+---

Inseparable Paare:

(1, 2)

(3, 4)

(5, 6)

(7, 8)

Mutationen:

(1, 2, 3, 4)

(1, 2, 5, 6)

(1, 2, 7, 8)

(1, 3, 5, 7)

(3, 4, 5, 6)

(3, 4, 7, 8)

(5, 6, 7, 8)

# Literaturverzeichnis

- [1] A. Björner, M. Las Vergnas, B. Sturmfels, N. White, G. Ziegler: Oriented Matroids, Cambridge University Press, Cambridge, 2nd edn (1999).
- [2] R. G. Bland, M. Las Vergnas: Orientability of Matroids, Journal Combinatorial Theory, B 24 (1978) 94-123
- [3] J. Bokowski: Handbook of Convex Geometry, Chapter Oriented Matroids, (P. Gruber, J. M. Wills) Elsevier, North-Holland, Netherlands (1992)
- [4] J. Bokowski: Oriented Matroid Theory and Its Applications, Rendiconti del Seminario Matematico di Messina, Serie II, Supplemento al n. 2 (1993) 15-24
- [5] J. Bokowski: On the Generation of Oriented Matroids, Discrete Computational Geometry 24 (2000), 197-208
- [6] J. Bokowski, H. Rohlfs: On a Mutation Problem for Oriented Matroids, European Journal of Combinatorics 22 (2001) 617-626
- [7] J. Folkman, J. Lawrence: Oriented Matroids, Journal Combinatorial Theory, B 25 (1978) 199-238
- [8] F. Levi: Die Teilung der Projektiven Ebene durch Gerade und Pseudogerade, Ber. Math.-Phys. Kl. Sächs. Akad. Wiss. 78, 256-267

- [9] N. Mnev, J. Richter-Gebert: Two Constructions of Oriented Matroids with Disconnected Extension Space, *Discrete Computational Geometry* (special issue: Oriented Matroids, eds. J. Richter-Gebert, G. M. Ziegler), 10 (1993) 271-285
- [10] J. Oxley: *Matroid Theory*, Oxford University Press, Oxford 1992
- [11] J. Richter-Gebert: Oriented Matroids with few Mutations, *Discrete Computational Geometry* (special issue: Oriented Matroids, eds. J. Richter-Gebert, G. M. Ziegler), 10 (1993) 251-269
- [12] J.-P. Roudneff, B. Sturmfels: Simplicial Cells in Arrangements and Mutations of Oriented Matroids, *Geometriae Dedicata* 27 (1988) 153-170
- [13] R. W. Shannon: A lower bound on the number of cells in arrangements of hyperplanes, *Journal Combinatorial Theory, A* 20 (1976) 327-335
- [14] R. W. Shannon: Simplicial Cells in arrangements of hyperplanes, *Geometriae Dedicata* 8 (1979), 179-18